ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ
1954

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ
ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

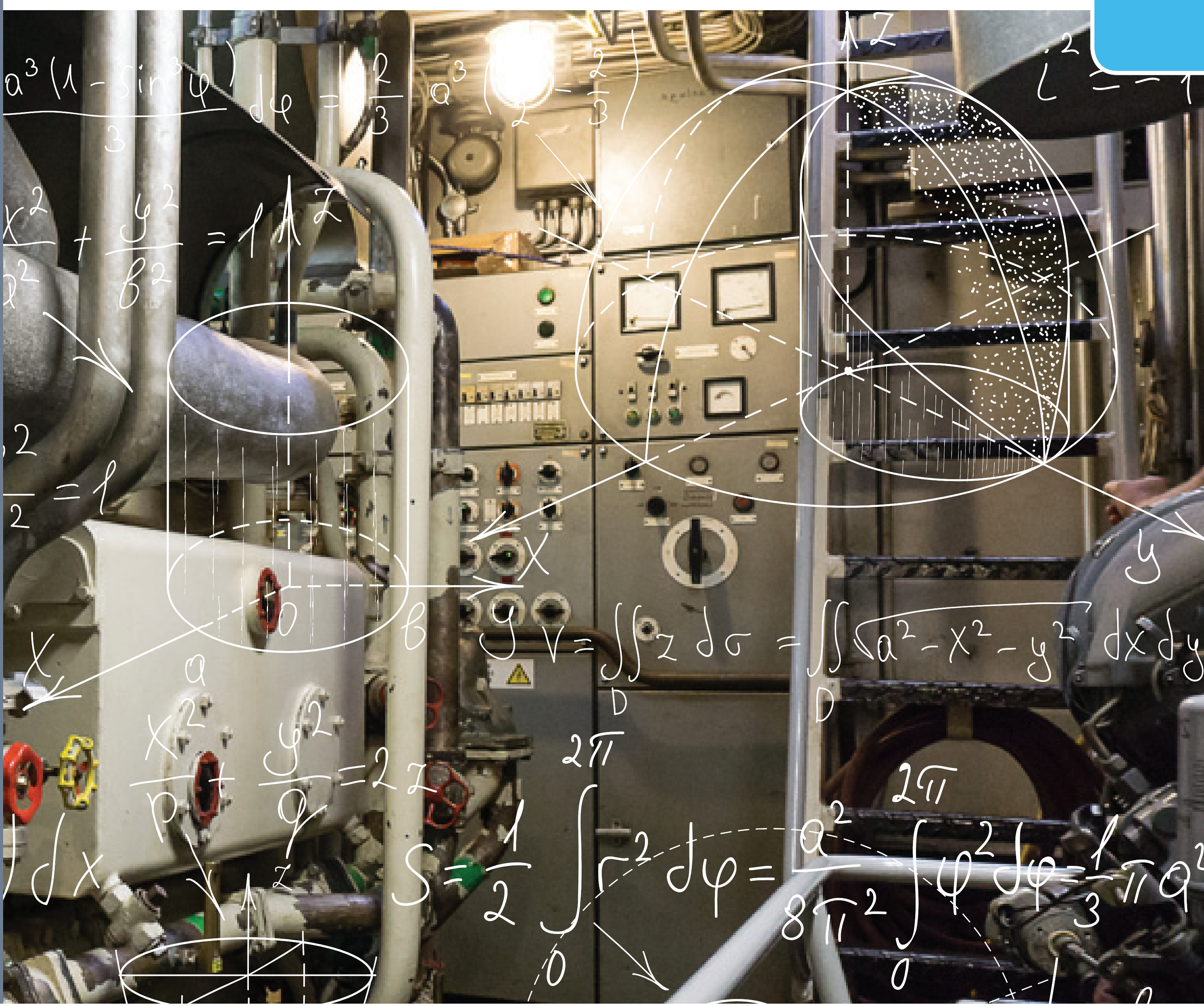
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΚΟΥ ΚΟΥΤΡΑ

β΄ έκδοση

ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Κεφάλαιο Πρώτο
Πινακες

1.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Ισότητα δύο πινάκων $A = [a_{ij}]_{\mu\times\nu}, B = [\beta_{ij}]_{\mu\times\nu}$.	$A = B \Leftrightarrow \alpha_{ij}$ για όλα τα $i = 1,2,\ldots,\mu$ και $j = 1,2,\ldots,\nu$
Μηδενικός πίνακας	΄Ενας πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν.
Διαγώνιος πίνακας τάξης ν	$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$
Μοναδιαίος πίνακας ή ταυτοτικός πίνακας τάξης ν	$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$
Ανάστροφος ενός πίνακα A	Ο πίνακας A^T, ο οποίος έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A.
Συμμετρικός πίνακας A	Πίνακας για τον οποίο ισχύει $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $j = 1, 2, \ldots, \nu$ ή ισοδύναμα $A^T = A$.
Αν $A = [a_{ij}]_{\mu\times\nu}$ και $B = [\beta_{ij}]_{\mu\times\nu}$, τότε μπορεί να ορισθεί: ● το άθροισμα, ● η διαφορά, ● το γινόμενο λA όπου $\lambda\in\mathbb{R}$	$A + B = [a_{ij} + \beta_{ij}]$ $A - B = [a_{ij} - \beta_{ij}]$ $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$
Γινόμενο του πίνακα $A = [a_{ij}]_{\mu\times\nu}$ με τον πίνακα $B = [\beta_{ij}]_{\nu\times\lambda}$	$AB = [\gamma_{ij}]_{\mu\times\lambda}$, όπου $\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \ldots + a_{i\nu}\beta_{\nu j}$
Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν	$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα τάξης 2 $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ με $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$	$A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

1.6 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το πλήθος των στοιχείων ενός πίνακα $A = [a_{ij}]_{\mu\times\nu}$ είναι $\mu+\nu$.	**Σ Λ**
2.	Αν $(\alpha^2+\beta^2)A = \mathbf{O}$, τότε $A = \mathbf{O}$.	**Σ Λ**
3.	Αν $3(A-B) = \mathbf{O}$, τότε $A=B$.	**Σ Λ**
4.	Αν AB είναι δύο πίνακες τύπου 3×4, τότε δεν ορίζεται το γινόμενό τους AB.	**Σ Λ**
5.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος.	**Σ Λ**
6.	Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^2 = I$, τότε θα είναι $A = I$ ή $A = -I$.	**Σ Λ**
7.	Αν ισχύει $AX = BX$ για κάποιον πίνακα X, του οποίου τα στοιχεία δεν είναι όλα ίσα με το μηδέν, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A = B$.	**Σ Λ**
8.	Αν ισχύει $AB = 5I$, όπου A, B τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξης, τότε οι A, B θα είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.	**Σ Λ**
9.	Αν $(A-I)^2 = \mathbf{O}$, τότε ο πίνακας A θα ισούται με τον μοναδιαίο πίνακα, δηλαδή $A = I$.	**Σ Λ**
10.	Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες, θα ισχύει πάντοτε η ισότητα $(AB)^2 = A^2B^2$.	**Σ Λ**
11.	Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.	**Σ Λ**
12.	Αν ισχύει $AB = O$ και ο ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι ο ταυτοτικός.	**Σ Λ**
13.	Αν ισχύει $AB = I$, τότε ο A θα είναι ο αντίστροφος του B.	**Σ Λ**
14.	Αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B, X είναι δύο άλλοι πίνακες για τους οποίους ισχύει $BX = A$, τότε συμπεραίνουμε ότι $X = A^{-1}B$.	**Σ Λ**
15.	Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες τάξης ν, τότε και το γινόμενο AB θα είναι αντιστρέψιμος πίνακας.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Οι τύποι που πρέπει να αντιστοιχούν σε δύο πίνακες A, B αντίστοιχα, ώστε να ορίζεται το γινόμενό τους και να είναι πίνακας στοιχείο, είναι αντίστοιχα: α) $1\times\nu,\ \nu\times 1$ β) $1\times\nu,\ \mu\times 1$ γ) $1\times\nu,\ \mu\times\nu$ δ) $\mu\times\nu$

2.	Το γινόμενο του πίνακα $\begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ με τον πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ίσο με: α) $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$
3.	Αν A, B είναι δύο πίνακες τύπου 4×10, τότε δεν ορίζεται: α) Το γινόμενό τους. β) Το άθροισμά τους. γ) Η διαφορά τους. δ) Ο $A^T B$.
4.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} a^2-3a+3 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 \end{bmatrix}$ γίνεται μοναδιαίος: $\mu\times\nu$ $\nu\times\nu$ $\nu\times\nu$ $\mu\times\nu$ α) Αν $\alpha = 1$. β) Αν $\alpha = 2$. γ) Αν $\alpha = 0$. δ) Ποτέ.
5.	Αν για τον $\mu\times\nu$ πίνακα A και τον μοναδιαίο πίνακα τάξης ν ισχύει $AI_\nu = I_\nu A = A$, τότε: α) $\mu \neq \nu$ β) $\mu = 2\nu$ γ) $\mu = \nu$ δ) $2\mu = \nu$
6.	Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $x \neq 0$ ένας σταθερός αριθμός. Σ' αυτήν την περίπτωση ο αντίστροφος του πίνακα xA είναι ο πίνακας: α) xA^{-1} β) $\frac{1}{x}A$ γ) $\frac{1}{x}A^{-1}$ δ) xA
7.	Αν A, B, Γ είναι τρεις πίνακες για τους οποίους ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται παρακάτω, τότε: α) Ισχύει $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$. β) Ισχύει $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$. γ) Ισχύει $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$. δ) Ισχύουν όλες οι σχέσεις που δίνονται παραπάνω.
8.	Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$: α) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. β) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$. γ) Δεν υπάρχει. δ) Είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.
9.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.

10.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
11.	Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ είναι: α) Τριγωνικός άνω. β) Τριγωνικός κάτω. γ) Διαγώνιος. δ) Ταυτοτικός.
12.	Αν *Α, Β, Γ είναι τρεις πίνακες τύπου* $\mu\times\nu$, τότε: α) Ισχύει $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$. β) Ισχύει $A + B = B + A$. γ) Ισχύει $A - (B - \Gamma) = (A - B) + \Gamma$. δ) Ισχύουν όλες οι σχέσεις που δίνονται παραπάνω.
13.	Αν *Α, Β* είναι δύο $\mu\times\nu$ πίνακες, τότε: α) $5(A+B) = 5A + B$ β) $\varrho AB = \mathbf{O}$, αν και μόνο αν $\varrho = 0$ ή $AB = \mathbf{O}$ γ) $AB = BA$ δ) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

1.7 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές

1.7.1. Να γράψετε το άθροισμα τετραγώνων $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2$ με πράξεις μεταξύ πινάκων, χρησιμοποιώντας τον πίνακα γραμμή $X = [x_1 x_2 ... x_\nu]$.

1.7.2. Για την κατασκευή ενος συστήματος πλοήγησης χρειάζονται α_1 εξαρτήματα τύπου A_1, α_2 εξαρτήματα τύπου A_2 και α_3 εξαρτήματα τύπου A_3. Το κόστος των τριών αυτών εξαρτημάτων είναι k_1, k_2, k_3 αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε τους 1×3 πίνακες $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ και $K = [k_1\ k_2\ k_3]$, τι εκφράζουν τα γινόμενα AK^T και KA^T; Τι παρατηρείτε;

1.7.3. Να αποδείξετε ότι:

α) Το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων διάστασης ν είναι επίσης διαγώνιος πίνακας της ίδιας διάστασης.

β) Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων διάστασης ν είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας της ίδιας διάστασης.

γ) Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων διάστασης ν είναι επίσης κάτω τριγωνικός πίνακας της ίδιας διάστασης.

1.7.4. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας *Α*. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός.

β) Ο πίνακας AA^T είναι συμμετρικός.

1.7.5. Έστω δύο τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες A, B. Να αποδείξετε ότι:
α) Ο πίνακας $-A$ είναι συμμετρικός.
β) Ο πίνακας A + Β είναι συμμετρικός.

1.7.6. Ένας πίνακας A ονομάζεται αντισυμμετρικός αν ισχύει $A^T = -A$. Έστω δύο τετραγωνικοί αντισυμμετρικοί πίνακες A, B. Να αποδείξετε ότι:
α) Ο πίνακας $-A$ είναι αντισυμμετρικός.
β) Ο πίνακας $A + B$ είναι αντισυμμετρικός.

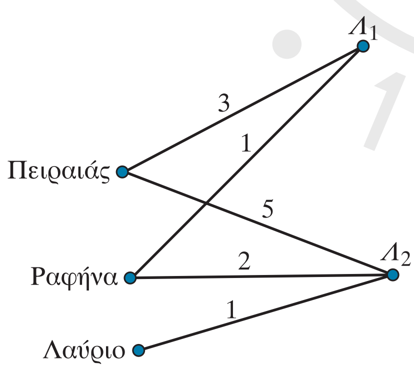
1.7.7. Αν για τους μηδενικούς τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A + B)^2 = A^2 + B^2$, να αποδείξετε ότι οι $AB = -BA$.

1.7.8. Αν για τους μη μηδενικούς τετραγωνικούς πίνακες A, B ισχύει $(A + 3B)(2A + B) = (2A + B)(A + 3B)$, να αποδείξετε ότι $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

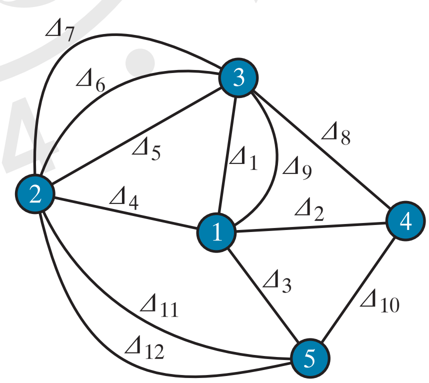
1.7.9. Αν A, B είναι μη μηδενικοί τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξης και ο B είναι συμμετρικός, να αποδείξετε ότι οι πίνακες $\Gamma = A^T BA$ και $\Delta = ABA^T$ είναι συμμετρικοί.

1.7.10. Το δίκτυο του σχήματος 1.1α παρουσιάζει τις συνδέσεις μεταξύ των τριών λιμένων της Αττικής και δύο άλλων λιμένων Λ_1, Λ_2, ενός ελληνικού νησιού. Ο αριθμός που σημειώνεται πάνω από κάθε γραμμή είναι ο αριθμός των διαφορετικών ημερήσιων δρομολογίων που συνδέουν τον κάθε λιμένα της Αττικής με τους λιμένες του νησιού, π.χ. από τον λιμένα του Πειραιά προς τον λιμένα Λ_1 εκτελούνται κάθε ημέρα 3 δρομολόγια. Να παραθέσετε σε μορφή πίνακα τις πληροφορίες που αφορούν στον αριθμό των διαθέσιμων διαφορετικών ημερήσιων δρομολογίων του δικτύου που περιγράφει το σχήμα 1.1α.

1.7.11. Πέντε πόλεις 1, 2, 3, 4, 5 επικοινωνούν μεταξύ τους με 12 δρόμους $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{12}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1β. Να κατασκευάσετε πίνακα $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$ τέτοιο ώστε, κάθε στοιχείο του a_{ij} να δίνει το πλήθος των απευθείας συνδέσεων μεταξύ των πόλεων i και j (π.χ. το στοιχείο a_{13} είναι το 2, γιατί υπάρχουν δύο απευθείας συνδέσεις μεταξύ των πόλεων 1 και 3).



Σχ. 1.1α.



Σχ. 1.1β.

1.7.12. Μία αλυσίδα ηλεκτρονικών ειδών έχει υποκαταστήματα σε Αθήνα, Πειραιά και Θεσσαλονίκη. Οι πωλήσεις, σε εκατοντάδες τεμάχια, της αλυσίδας σε τηλεοράσεις, DVD, φωτογραφικές μηχανές και κινητά τηλέφωνα από κάθε υποκατάστημα σε κάθε πόλη κατά τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο ήταν οι εξής:

	Σεπτέμβριος			Οκτώβριος		
	Αθήνα	**Πειραιάς**	**Θεσσαλονίκη**	**Αθήνα**	**Πειραιάς**	**Θεσσαλονίκη**
Τηλεοράσεις	20	30	33	25	18	75
DVD	55	40	39	15	23	29
Φωτ. μηχανές	29	15	48	15	50	18
Κινητά	90	80	65	30	66	85

α) Να συντάξετε δύο πίνακες που να δίνουν, ο πρώτος τον αριθμό των πωλήσεων για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά τον μήνα Σεπτέμβριο και ο δεύτερος τον αριθμό των πωλήσεων για κάθε είδος σε κάθε πόλη κατά τον μήνα Οκτώβριο.

β) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει το συνολικό αριθμό των πωλήσεων του διμήνου Σεπτέμβριος-Οκτώβριος για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

γ) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τη διαφορά πωλήσεων μεταξύ Σεπτεμβρίου και Οκτωβρίου για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

δ) Αν κατά τον μήνα Οκτώβριο η αλυσίδα αποφασίζει να κάνει προσφορά μαζί με κάθε είδος που αγοράστηκε και ένα δεύτερο τεμάχιο (του ίδιου είδους) δωρεάν, να συντάξετε τον πίνακα που περιγράφει τον συνολικό αριθμό τεμαχίων που διατέθηκαν στο δίμηνο Σεπτέμβριος-Οκτώβριος για κάθε είδος σε κάθε πόλη.

1.7.13. Κατά τον μήνα Ιούνιο, οι τιμές του ακτοπλοϊκού εισιτηρίου (σε €) για μετάβαση από την Αθήνα σε τρία νησιά α, β, γ, μέσω 4 εταιρειών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	α	β	γ
Εταιρεία 1	200	380	150
Εταιρεία 2	205	385	155
Εταιρεία 3	195	375	140
Εταιρεία 4	210	390	160

α) Να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τις τιμές των εισιτήριων για κάθε νησί από κάθε εταιρεία κατά τον μήνα Ιούνιο.

β) Αν κατά τον μήνα Ιούλιο οι τιμές αυξηθούν από όλες τις εταιρείες κατά 10%, να συντάξετε τον πίνακα που δίνει τις τιμές των εισιτηρίων κατά τον μήνα Ιούλιο.

1.7.14. Μια βιομηχανία κατασκευάζει τρία φουσκωτά σωσίβια $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, σε δύο εργοστάσια παραγωγής E_1 και E_2. Το κόστος παραγωγής ανά σωσίβιο σε € για τα υλικά που χρησιμοποιούνται και την αντίστοιχη εργασία δίνεται στους παρακάτω πίνακες:

$$E_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 50 & 40 & 60 \\ 20 & 10 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix} \qquad E_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 55 & 60 & 70 \\ 15 & 10 & 25 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{Υλικά} \\ \text{Εργασία} \end{matrix}$$

α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

β) Αν τόσο το κόστος παραγωγής όσο και το κόστος των υλικών αυξηθούν κατά 20%, να υπολογίσετε τους νέους πίνακες κόστους παραγωγής για τα δύο εργοστάσια. Επίσης να υπολογίσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους τον πίνακα που εκφράζει το νέο μέσο κόστος κατασκευής ανά σωσίβιο και είδος (υλικά και εργασία) για τη βιομηχανία.

1.7.15. Μια βιοτεχνία έχει δύο εργοστάσια ε_1 και ε_2, στα οποία κατασκευάζονται τρία διαφορετικά ναυτιλιακά προϊόντα π_1, π_2 και π_3. Οι παρακάτω δύο πίνακες A και B δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για κάθε φάση $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ της κατασκευής κάθε προϊόντος και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού κάθε εργοστασίου σε ευρώ αντίστοιχα.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1{,}5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \\ B= & \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 17 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array}$$

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο AB και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

β) Πώς θα μπορούσατε να εκφράσετε με πράξεις μεταξύ πινάκων το συνολικό κόστος εργασίας για την κατασκευή 2 μονάδων του προϊόντος π_1, 3 μονάδων του προϊόντος π_2 και 5 μονάδων του προϊόντος π_3 σε κάθε ένα από τα δύο εργοστάσια;

1.7.16. Οι εργαζόμενοι σε τρεις εταιρείες κατασκευής μικρών σκαφών διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: σε ειδικευμένους και σε ανειδίκευτους. Ο αριθμός των εργατών ανά κατηγορία σε κάθε εταιρεία και οι αντίστοιχες εβδομαδιαίες αποδοχές τους για δύο διαδοχικά έτη α και β δίνονται στους επόμενους δύο πίνακες.

	Αριθμός εργατών	
	Ειδικευμένοι	*Ανειδίκευτοι*
1η εταιρεία	60	75
2η εταιρεία	30	60
3η εταιρεία	10	70

Εβδομαδιαίες αποδοχές		
	α	***β***
Ειδικευμένοι	20	50
Ανειδίκευτοι	15	40

Να βρεθεί ένας πίνακας, που να περιγράφει τις εβδομαδιαίες δαπάνες κάθε εταιρείας για καθένα από τα δύο έτη.

1.7.17. Τα οχήματα που διακινήθηκαν από ένα επιβατικό πλοίο στα δύο τελευταία δρομολόγια που έκανε δίνονται παρακάτω.

		Δρομολόγιο 1			*Δρομολόγιο 2*		
		επιβατικά	*φορτηγά*	*δίκυκλα*	*επιβατικά*	*φορτηγά*	*δίκυκλα*
Κατάστρωμα	1	100	30	50	120	60	30
	2	150	35	40	180	55	35

α) Να γραφούν τα στοιχεία που αφορούν στο δρομολόγιο 1 με την μορφή πίνακα A τύπου 2×3.

β) Να γραφούν τα στοιχεία που αφορουν στο δρομολόγιο 2 με την μορφή πίνακα B τύπου 2×3.

γ) Να υπολογιστεί ο πίνακας $A + B$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

1.7.18. Ένα πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Ραφήνα-Άνδρος-Τήνος-Μήκονος και αναχωρεί από τον Πειραία μεταφέροντας οχήματα και επιβάτες όπως αυτοί φαίνονται, ανά κατηγορία στον πίνακα.

$$A=\begin{bmatrix}50\\250\\100\\500\\1500\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{φορτηγά}\\\text{ΙΧ}\\\text{δίκυκλα}\\\text{θέση V.I.P.}\\\text{οικονομική θέση}\end{array}$$

Ο αριθμός αποβιβάσεων στην Άνδρο και στην Τήνο δίνονται από τους επόμενους δύο πίνακες.

$$B=\begin{bmatrix}10\\30\\20\\100\\300\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{φορτηγά}\\\text{ΙΧ}\\\text{δίκυκλα}\\\text{θέση V.I.P.}\\\text{οικονομική θέση}\end{array}\qquad \Gamma=\begin{bmatrix}20\\50\\40\\200\\500\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{φορτηγά}\\\text{ΙΧ}\\\text{δίκυκλα}\\\text{θέση V.I.P.}\\\text{οικονομική θέση}\end{array}$$

α) Να εκφραστεί συναρτήσει των A, B, Γ ο πίνακας Δ ο που θα μας δίνει τα οχήματα και τους επιβάτες ανά κατηγορία οι οποίοι επιβάστηκαν στη Ραφήνα και αναμένονται να αποβιβαστούν στην Μυκονο.

β) Να υπολογιστεί ο πίνακας Δ.

γ) Χρησιμοποιήστε τις τρέχουσες τιμές ναύλου ανά κατηγορία για μια ακτοπλοϊκή εταιρεία και αφού τις οργανώσετε σε κατάλληλους πίνακες (έναν για κάθε νησί), υπολογίστε τα συνολικά έξοδα του δρομολογίου που αφορούν στα οχήματα και στους επιβάτες οι οποίοι επιβιβάστηκαν στη Ραφήνα.

1.7.19. Ναυτιλιακή εταιρεία λόγω αυξημένης κερδοφορίας αποφάσισε να αυξήσει κατά 10% τον μισθό στους αξιωματικούς των πλοίων της. Η τρέχουσα μισθοδοσία (σε €), ανά ειδικότητα και βαθμό φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

		Ειδικότητα	
		Πλοίαρχος	*Μηχανικός*
Βαθμός	α	9000	8000
	β	7500	7000
	γ	6500	6000

α) Να γραφούν τα παραπάνω στοιχεία στην μορφή ενός πίνακα A τύπου 3×2.

β) Να εκφραστεί συναρτήσει του A ο πίνακας B που δίνει τους μισθούς ανά ειδικότητα και βαθμό μετά την χορήγηση της αύξησης.

γ) Να υπολογιστεί ο πίνακας B.

Κεφάλαιο Δεύτερο

Ορίζουσες

2.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας

Ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$
Ορίζουσα τριγωνικού πίνακα	Ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου
Ορίζουσα ενός πίνακα A που έχει δύο γραμμές ίσες (ή ανάλογες) ή δύο στήλες ίσες (ή ανάλογες).	$\lvert A\rvert = 0$
Ορίζουσες και πράξεις τετραγωνικών πινάκων	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$, $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$, $\lvert\lambda A\rvert=\lambda^\nu\lvert A\rvert$ $\lvert A^k\rvert=\lvert A\rvert^k$, $k=2, 3,...$ $\lvert A^{-1}\rvert=\dfrac{1}{\lvert A\rvert}$ (όταν $\lvert A\rvert \neq 0$)
Υπολογισμός του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα	Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\lvert A\rvert \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφός του A δίνεται από τον τύπο $A^{-1}=\dfrac{1}{\lvert A\rvert}C^T$ όπου $C=[c_{ij}]_{\nu\times\nu}$, και $c_{ij}=(-1)^{i+j}\lvert M_{ij}\rvert$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}.
Γραμμικό σύστημα με μ εξισώσεις και ν αγνώστους ή απλά γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$	$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+...+\alpha_{1\nu}x_\nu=\beta_1$ $\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+...+\alpha_{2\nu}x_\nu=\beta_2$ .... $\alpha_{\mu1}x_1+\alpha_{\mu2}x_2+...+\alpha_{\mu\nu}x_\nu=\beta_\mu$ ή με χρήση πινάκων, $AX=B$, όπου $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$

2.6 Ερωτήσεις κατανόησης

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, τότε η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο $\lvert A \rvert = \alpha_{11}\alpha_{12} - \alpha_{21}\alpha_{22}$.	**Σ Λ**
2.	Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι ίση με μηδέν.	**Σ Λ**
3.	Αν η ορίζουσα ενός πίνακα A είναι ίση με 1, τότε ο A θα είναι ίσος με τον ταυτοτικό πίνακα.	**Σ Λ**
4.	Η ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.	**Σ Λ**
5.	Αν τα στοιχεία ενός πίνακα A είναι όλα ίσα με 1, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.	**Σ Λ**
6.	Αν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.	**Σ Λ**
7.	Αν $A^3 = \mathbf{O}$, τότε $\lvert A \rvert = 1$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ είναι ίση με: α) $\lvert A \rvert = 0$ β) $\lvert A \rvert = 1$ γ) $\lvert A \rvert = 6$ δ) $\lvert A \rvert = 1/2$
2.	Αν A είναι ένας 2×2 πίνακας, τότε: α) $\lvert 2A \rvert = 4\lvert A \rvert$ β) $\lvert 2A \rvert = 2\lvert A \rvert$ γ) $\lvert 2A \rvert = \frac{1}{2}\lvert A \rvert$ δ) $\lvert 2A \rvert = \lvert A \rvert$
3.	Αν A, B είναι δύο πίνακες με $\lvert A \rvert = 3$, $\lvert B \rvert = 4$, τότε α) $\lvert AB \rvert = 12$ β) $\lvert AB \rvert = 3^4$ γ) $\lvert AB \rvert = 4^3$ δ) $\lvert AB \rvert = 7$
4.	Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών (ή δύο στηλών) του πίνακα A, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει: α) $\lvert B \rvert + \lvert A \rvert = 0$ β) $\lvert B \rvert = \lvert A \rvert$ γ) $\lvert B \rvert = \lvert -A \rvert$ δ) $\lvert B \rvert = \dfrac{1}{\lvert A \rvert}$

5.	Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει με αντικατάσταση μίας στήλης του πίνακα A με εκείνη που προκύπτει με πρόσθεση σε αυτήν μίας άλλης στήλης του πίνακα A πολλαπλασιασμένης επί έναν (μη μηδενικό) αριθμό, τότε για τις ορίζουσες των πινάκων A και B ισχύει: α) $\|B\|+\|A\|=0$ β) $\|B\|=\|A\|$ γ) $\|B\|=\|-A\|$ δ) $\|B\|=\dfrac{1}{\|A\|}$
6.	Ποιος από τους επόμενους τύπους ισχύει πάντοτε (εφόσον έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται); α) $\|AA^T\|=\|A\|^2$ β) $\|AB\|=\|A\|\,\|B\|$ γ) $\|A^T\|=\|A\|$ δ) Και οι τρεις.
7.	Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης ν με $\lambda=\|A\|\neq 0$ και C^T είναι ο προσαρτημένος πίνακας του A, τότε: α) Ισχύει η ισότητα $A\,C^T=\|A\|\,I_\nu$. β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο $A^{-1}=\dfrac{1}{\|A\|}C^T$. γ) Ισχύει η ισότητα $\|A^{-1}\|=\dfrac{1}{\|A\|}$. δ) Ισχύουν όλα τα προηγούμενα.

2.7 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές

2.7.1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν, αν γνωρίζετε ότι $|A|\neq 0$ και ότι ισχύει $A^4=A$.

2.7.2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν, αν γνωρίζετε ότι ισχύει $A^T=-A$ και ότι το ν είναι άρτιος θετικός ακέραιος.

2.7.3. Να υπολογίσετε η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A τάξης ν, αν γνωρίζετε ότι $|A|\neq 0$ και ότι ισχύει $A^TA^3A^T=AA^T$.

2.7.4. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός, P ένας αντιστρέψιμος πίνακας και B ο πίνακας που δίνεται από τον τύπο $B=P^{-1}AP$.
α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $\lambda I-B=P^{-1}(\lambda I-A)P$.
β) Να αποδείξετε ότι οι ορίζουσες των πινάκων $\lambda I-B$ και $\lambda I-A$ είναι ίσες.

2.7.5. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης ν και λ ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $|A-\lambda I_\nu|=0$. Τότε ο αριθμός λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα A.
α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, να αποδείξετε ότι οι πίνακες A και $B=P^{-1}AP$ έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές.
β) Να βρείτε τις ιδιοτιμές των επομένων πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 3 & 0 \\ \gamma & \varepsilon & \theta & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.7.6. Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

α) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ β) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y & a \\ 0 & 0 & z & \beta & k \\ 0 & w & \gamma & m & b \\ u & \delta & n & c & s \end{bmatrix}$

Στη συνέχεια να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για πίνακες τάξης ν, οι οποίοι έχουν τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{2\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{3\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\nu-1,2} & a_{\nu-1,3} & \cdots & a_{\nu-1,\nu-1} & a_{\nu-1,\nu} \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \cdots & a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

2.7.7. α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα (τάξης ν)

$$\begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+a_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+a_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+a_{\nu-1} & a \\ a & a & a & \cdots & a & a+a_\nu \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $\alpha(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu)$.

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξης 5, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$A \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A.

(***Υπόδειξη:*** Να αφαιρέσετε την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες. Παρατηρήστε στη συνέχεια ότι ο πίνακας που δημιουργείται είναι άνω τριγωνικός).

2.7.8. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του $\nu \times \nu$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $|A| = (x+(\nu-1)a)\ (x-a)^{\nu-1}$.

2.7.9. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} (x+a)^2 & x^2+a^2 & ax & p \\ (y+\beta)^2 & y^2+\beta^2 & \beta y & q \\ (z+\gamma)^2 & z^2+\gamma^2 & \gamma z & r \\ (w+\delta)^2 & w^2+\delta^2 & \delta w & s \end{vmatrix} = 0.$$

(***Υπόδειξη***: Προσθέστε στη δεύτερη γραμμή την τρίτη στήλη πολλαπλασιασμένη επί 2 και στη συνέχεια παρατηρήστε ότι η ορίζουσα που προκύπτει έχει δύο ίδιες στήλες).

2.7.10 α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο, να αποδειξετε ότι η τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 1+\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & 1+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 1+\delta \end{bmatrix}$$

είναι ίση με $1+\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

β) Για έναν τετραγωνικό πίνακα A τάξεως 4, γνωρίζομε ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A.

2.7.11. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών και μόνο να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a^3 & 8a^3 & 27a^3 & 64a^3 \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 & 16a^2 \\ a & 2a & 3a & 4a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12a^6.$$

2.7.12. Έστω τρία σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 2.3.4, να αποδείξετε ότι τα σημεία είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.7.13. Έστω A, B, Γ τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου xOy με συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) αντίστοιχα. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.3.4, για τις συντεταγμένες των σημείων θα ισχύει

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

είναι εξίσωση κύκλου.

α) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος περνάει από τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία (1, 1), (3, 4) και (4, 2).

2.7.14. Μια πετρελαιοκηλίδα που εμφανίστηκε στην επιφάνεια της θάλασσας μετά από κάποιο ναυάγιο, περιορίστηκε τελικώς μεταξύ τριών σημείων A, B, Γ με συντεταγμένες (1, 5), (2, 3), (–2, 1) αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.1.2, να υπολογίσετε το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας.

Κεφάλαιο Τρίτο
Γραμμικά συστήματα

3.5 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας

Ένα γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$ μπορεί να είναι:	Αδύνατο ή συμβιβαστό (μία λύση ή άπειρες λύσεις).
Τύποι του Cramer (μόνο για $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα).	$x_1=\frac{D_{x_1}}{D},\quad x_2=\frac{D_{x_2}}{D},\dots,x_\nu=\frac{D_{x_\nu}}{D}$
Ομογενές γραμμικό σύστημα $AX=\mathbf{O}$.	Είναι πάντοτε συμβιβαστό και είτε θα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική, είτε θα έχει και άλλες λύσεις μη μηδενικές, οι οποίες θα είναι άπειρες.

3.6 Ερωτήσεις κατανόησης

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία: Αντικατάσταση της εξίσωσης που βρίσκεται στη θέση i με εκείνη που προκύπτει αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με έναν μη μηδενικό αριθμό λ. Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.	**Σ Λ**
2.	Σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία: Αντικατάσταση της εξίσωσης που βρίσκεται στη θέση i με εκείνη που προκύπτει αν και στα δύο μέλη της προσθέσουμε τα αντίστοιχα μέλη μιας άλλης που βρίσκεται στη θέση j. Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.	**Σ Λ**
3.	Η μέθοδος της αντιστροφής προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι διευκολύνει στην επίλυση πολλών συστημάτων της μορφής $AX=B$ με τον ίδιο πίνακα B, αλλά διαφορετικό δεξί μέλος A.	**Σ Λ**
4.	Το σύστημα $\begin{cases}\lambda x-\ y=0\\ x+\lambda y=0\end{cases}$ δεν έχει άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική λύση.	**Σ Λ**
5.	Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις.	**Σ Λ**
6.	Η ν-άδα (0,0,...,0) είναι λύση κάθε ομογενούς γραμμικού συστήματος με ν αγνώστους.	**Σ Λ**
7.	Ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν:

1.	Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι γραμμική εξίσωση με αγνώστους τα x, y, z ; α) $x-3\sqrt{y}+2z=1$ β) $x-y\sqrt{3}+2z=1$ γ) $x-3\sqrt{y}+2z=0$ δ) Καμμία
2.	Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, αν α) $\lambda = 0$ β) $\lambda = 1$ γ) $\lambda = -1$ δ) $\lambda \neq 0, -1, 1$
3.	Ποια από τις παρακάτω διαδικασίες οδηγεί σε ισοδύναμο σύστημα; α) $\varepsilon_1 \to \varepsilon_2+5\varepsilon_3$ β) $\varepsilon_1 \to \varepsilon_1+5\varepsilon_2$ γ) $\varepsilon_1 \to 5\varepsilon_2$ δ) $\varepsilon_1 \to (1/5)\,\varepsilon_2$
4.	Το γραμμικό σύστημα $AX=B$ ονομάζεται ομογενές, όταν: α) $B=\mathbf{O}$ β) $A=\mathbf{O}$ γ) $A=I$ δ) $B=I$
5.	Έστω ένα $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$. Αν $\lvert A \rvert = 0$, τότε το σύστημα: α) Είναι αδύνατο. β) Ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. γ) Έχει άπειρες λύσεις. δ) Είναι συμβιβαστό.
6.	Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους: α) Μπορεί να έχει ακριβώς 4 λύσεις. β) Μπορεί να έχει μοναδική λύση. γ) Μπορεί να είναι αδύνατο. δ) Έχει πάντοτε μία λύση.

3.7 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές

3.7.1. Δίνονται τρεις ευθείες με εξισώσεις $4\lambda x-3y+2\lambda-3=0$, $3x-2y+5=0$, $4x-2\lambda y+1=0$, όπου $\lambda \in \mathrm{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ, για τους οποίους οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β) Για καθέναν από τους αριθμούς αυτούς να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

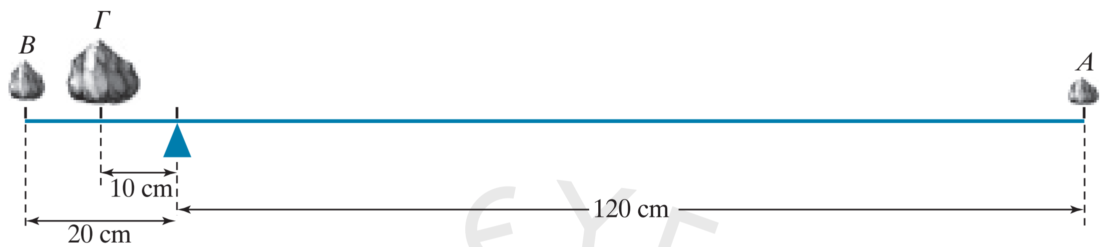
3.7.2. Ένα πλοίο Π_1 κινείται σε ευθεία γραμμή από το λιμάνι A με συντεταγμένες (0, 0) προς το λιμάνι B με συντεταγμένες (5, 4). Ένα δεύτερο πλοίο Π_2 κινείται επίσης σε ευθεία γραμμή από το λιμάνι Γ με συντεταγμένες (3, 1) προς το λιμάνι Δ με συντεταγμένες (4, 5).

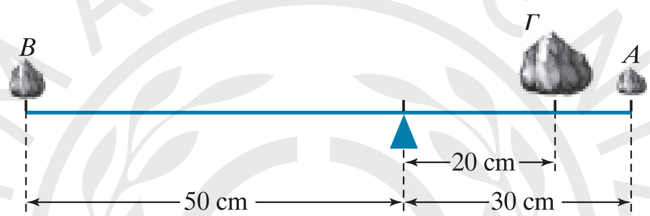
α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.3.4, να γράψετε τις εξισώσεις των τροχιών των δύο πλοίων στη μορφή

$$\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1,\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2$$

β) Χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.1.8), να εξετάσετε αν οι τροχιές των δύο πλοίων τέμνονται σε κάποιο σημείο και αν ναι να το βρείτε.

3.7.3. Κατά τη μεταφορά ενός ογκόλιθου 1000 kg σε ένα πλοίο, από αδέξιο χειρισμό του φορτωτή, ο ογκόλιθος έπεσε και έσπασε σε τρία κομμάτια A, B, Γ. Μετά τη θραύση χρειάστηκε να προσδιοριστεί το βάρος των τριών τεμαχίων. Λόγω έλλειψης ζυγαριάς ο χειριστής σκέφτηκε το εξής τέχνασμα. Τοποθέτησε τα τρία τεμάχια επάνω σε μια σιδηροδοκό με δύο διαφορετικούς τρόπους, ώστε να ισορροπήσουν και μέτρησε τις αποστάσεις από το σημείο στήριξης, οι οποίες ήταν όπως δείχνουν τα παρακάτω σχήματα:

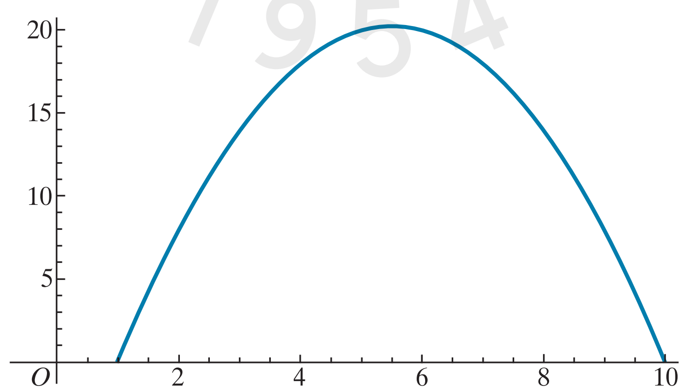




α) Αν συμβολίσουμε με x, y, z τα βάρη των τριών κομματιών, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z.

β) Να βρείτε τα βάρη των τριών κομματιών, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

3.7.4. Η τροχιά μιας τροχιοδεικτικής βολίδας που εκτοξεύεται από το σημείο με συντεταγμένες (1,0) είναι παραβολή με εξίσωση της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ (βλ. παρακάτω σχήμα).
Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς της βολίδας αν είναι γνωστό ότι αυτή περνάει από τα σημεία με συντεταγμένες $(x, y) = (2, 8)$, $(5, 20)$.



3.7.5. Στο κατάστημα δώρων που υπάρχει σε ένα κρουαζιερόπλοιο διατίθενται καλάθια ποτών σε συσκευασία δώρου, με τρεις διαφορετικές συσκευασίες α, β, γ με διάφορα ποτά. Το κάθε καλάθι περιέχει μπουκάλια από κρασιά, ουίσκι και βότκα. Στη συσκευασία α τοποθετούνται 2 μπουκάλια κρασί, 1 μπουκάλι ουίσκι και 3 μπουκάλια βότκα. Στη συσκευασία β τοποθετούνται 3 μπουκάλια κρασί και 2 μπουκάλια ουίσκι, ενώ τέλος, στη συσκευασία γ τοποθετούνται 4 μπουκάλια κρασί και 4 μπουκάλια βότκα. Το κατάστημα έχει στην αποθήκη του 90 μπουκάλια κρασί, 30 μπουκάλια ουίσκι και 70 μπουκάλια βότκα και θέλει να κατασκευάσει τόσες συσκευασίες, ώστε να χρησιμοποιηθούν όλα τα ποτά της αποθήκης.

α) Αν συμβολίσουμε με x, y, z τον αριθμό συσκευασιών α, β, γ που θα κατασκευαστούν με χρήση όλων των διαθέσιμων αποθεμάτων, να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα x, y, z.

β) Να βρείτε τον αριθμό συσκευασιών α, β, γ, λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικαταστάσεως.

3.7.6. Μία ναυτιλιακή εταιρεία έχει δύο φορτηγά πλοία I και II που μεταφέρουν εμπορεύματα τριών ειδών *Α*, *Β*, *Γ*. Το πλοίο I μεταφέρει, σε μία διαδρομή του 1000 τόνους εμπορεύματος τύπου *Α*, 4.000 τόνους εμπορεύματος τύπου *Β* και 3.000 τόνους εμπορεύματος τύπου *Γ*. Το πλοίο II μεταφέρει σε κάθε διαδρομή 2.000 τόνους, 3.000 τόνους και 1000 τόνους εμπορευμάτων τύπων *Α*, *Β*, *Γ* αντίστοιχα. Αν η εταιρεία έχει υπογράψει συμβόλαια για να παραδώσει 15.000 τόνους εμπορεύματος τύπου *Α*, 35.000 τόνους εμπορεύματος τύπου *Β* και 20.000 τόνους εμπορεύματος τύπου *Γ*:

α) Να γράψετε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι αριθμοί (πλήθος) δρομολογίων x, y που θα πρέπει να εκτελέσουν τα δύο πλοία I και II αντίστοιχα, ώστε να εκτελεστούν τα συμβόλαια της ναυτιλιακής εταιρείας χωρίς να γίνει μεταφορά από τα πλοία οποιουδήποτε άλλου φορτίου πέραν των απαραίτητων εμπορευμάτων τύπου *Α*, *Β*, *Γ*.

β) Λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης να διαπιστώσετε ότι δεν μπορούν να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές των x, y ώστε να επιτευχθεί το ζητούμενο.

Κεφάλαιο Τέταρτο
Μιγαδικοί αριθμοί

4.8 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας

Φανταστική μονάδα i.	$\mathrm{i}^2 = (-\mathrm{i})^2 = -1$
Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$.	$\mathrm{Re}(z) = a,\ \mathrm{Im}(z) = \beta$
Μέτρο μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta\mathrm{i}$.	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + \beta^2}$
Ισότητα δύο μιγαδικών $z_1 = \alpha + \beta\mathrm{i},\ z_2 = \gamma + \delta\mathrm{i}$.	$\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$
Πράξεις μεταξύ μιγαδικών.	$(\alpha+\beta\,\mathrm{i})+(\gamma+\delta\,\mathrm{i}) = (\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)\mathrm{i}$ $(\alpha+\beta\,\mathrm{i})-(\gamma+\delta\,\mathrm{i}) = (\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\mathrm{i}$ $(\alpha+\beta\,\mathrm{i})\cdot(\gamma+\delta\,\mathrm{i}) = (\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\mathrm{i}$ $\dfrac{\alpha+\beta\,\mathrm{i}}{\gamma+\delta\,\mathrm{i}} = \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\mathrm{i}$
Συζυγής μιγαδικού.	$\overline{z} = \overline{a+\beta\,\mathrm{i}} = a - \beta\,\mathrm{i}$
Ιδιότητες συζυγούς.	$\overline{(\overline{z})} = z\,,\ z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z),\ z-\overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1+\overline{z}_2,\ \overline{z_1-z_2} = \overline{z}_1-\overline{z}_2$ $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z}_1\cdot\overline{z}_2,\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ \overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu, \quad \nu\in\mathrm{N}$
Δυνάμεις του i.	$\mathrm{i}^{4\kappa+\upsilon} = \mathrm{i}^{\upsilon} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \upsilon = 0 \\ \mathrm{i} & \text{αν } \upsilon = 1 \\ -1 & \text{αν } \upsilon = 2 \\ \mathrm{i} & \text{αν } \upsilon = 3 \end{cases}$ όπου κ, υ ακέραιοι και $\kappa \geq 0,\ 0 \leq \upsilon < 4$.
Ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.	$\lvert z\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert\overline{z}\rvert = \lvert -\overline{z}\rvert,\ z\overline{z} = \lvert z\rvert^2,\ \lvert z_1z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\,\lvert z_2\rvert, \left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}, \quad z_2 \neq 0$ $\big\lvert\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\big\rvert \leq \lvert z_1+z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
Εξίσωση $\lvert z-z_0\rvert = r$ όπου $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.	Παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα r.
Εξίσωση $\lvert z-z_1\rvert = \lvert z-z_2\rvert$.	Περιγράφει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους αριθμούς z_1 και z_2.

Τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $z = \alpha + \beta$i.	$z = \rho\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$ όπου $\rho = \lvert z \rvert$, $\text{συν}\theta = \dfrac{\alpha}{\rho}$, $\text{ημ}\,\theta = \dfrac{\beta}{\rho}$
Πράξεις με χρήση τριγωνομετρικής μορφής.	Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_2)$ τότε $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\,[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)]$ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\,[\text{συν}(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1 - \theta_2)]$, $\rho_2 \neq 0$.
Πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i.	Στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία π/2 (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).
Πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $i^3 = -i$.	Στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία 3π/2 με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.
Τύπος De Moivre.	Αν $z = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$, τότε $z^\nu = \rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta) + i\,\text{ημ}(\nu\theta)]$.
Νιοστές ρίζες μιγαδικού $w = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$.	$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\dfrac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\dfrac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu}\right)$, $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$
Συζυγείς ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές.	Για κάθε μιγαδική ρίζα $\alpha + \beta$i ($\beta \neq 0$), ο συζυγής $\alpha - \beta$i είναι επίσης ρίζα.
Πλήθος ριζών πολυωνυμικής εξίσωσης $P(z)=0$, νιοστού βαθμού.	Κάθε πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού της μορφής $\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{C}$, $\alpha_\nu \neq 0$, έχει ακριβώς ν ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

4.9 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Ο αριθμός z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z + \overline{z} = 0$.	**Σ Λ**
2.	Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $z_1 = z_2 = 0$.	**Σ Λ**
3.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\lvert z^2 \rvert = \lvert z \rvert^2$.	**Σ Λ**
4.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\lvert z^2 \rvert = z^2$.	**Σ Λ**
5.	Ο αριθμός $z = (2+3\,i)^{20} + (2-3\,i)^{20}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.	**Σ Λ**
6.	Αν $z + \overline{z} = 0$, τότε $\text{Re}(z)=2$.	**Σ Λ**

7.	Αν $z = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\eta\mu\dfrac{\pi}{4}$, τότε η δύναμη z^{200} είναι ίση με 1.	**Σ Λ**
8.	Η εξίσωση $\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.	**Σ Λ**
9.	Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $z + \overline{z} = 0$ είναι όσα βρίσκονται επάνω στον φανταστικό άξονα.	**Σ Λ**
10.	Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}$ είναι όσα βρίσκονται επάνω στον πραγματικό άξονα.	**Σ Λ**
11.	Αν ο μιγαδικός αριθμός z έχει όρισμα τη γωνία θ, τότε ο μιγαδικός αριθμός z/i έχει όρισμα τη γωνία $\theta - \dfrac{\pi}{2}$.	**Σ Λ**
12.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\lvert z\rvert = -\lvert -z\rvert = \lvert\overline{z}\rvert = -\lvert -\overline{z}\rvert$.	**Σ Λ**
13.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\overline{(z^{\nu})} = (\overline{z})^{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$.	**Σ Λ**
14.	Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με μιγαδικούς συντελεστές, τότε ο συζυγής του είναι επίσης ρίζα του ίδιου πολυωνύμου.	**Σ Λ**
15.	Αν μία πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό $1-\mathrm{i}$, τότε το πολυώνυμο $P(z)$ έχει παράγοντα τον $z^2 - 2z + 2$.	**Σ Λ**
16.	Αν $\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + \mathrm{i}\,\eta\mu\theta_1) = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + \mathrm{i}\,\eta\mu\theta_2)$, τότε $\rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 = \theta_2$.	**Σ Λ**
17.	Ο τύπος De Moivre $[\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + \mathrm{i}\,\eta\mu\theta)]^{\nu} = \rho^{\nu}[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + \mathrm{i}\,\eta\mu(\nu\theta)]$ δεν ισχύει όταν ο εκθέτης ν είναι αρνητικός ακέραιος.	**Σ Λ**
18.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $\pi/2$.	**Σ Λ**
19.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του $M(z)$ κατά γωνία $3\pi/2$.	**Σ Λ**
20.	Κάθε πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού, της μορφής $\alpha_{\nu}z^{\nu} + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots$ $\ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu} \in \mathbb{C}$, $\alpha_{\nu} \neq 0$, έχει ακριβώς ν ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.	**Σ Λ**
21.	Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^{40} = 1024$ στο μιγαδικό επίπεδο, σχηματίζουν ένα κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\dfrac{\pi}{40}$.	**Σ Λ**
22.	Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^{10} = 3^{10}$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r = 3$.	**Σ Λ**
23.	Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^3 = \sqrt{7} + \mathrm{i}\sqrt{25}$ στο μιγαδικό επίπεδο, βρίσκονται επάνω στην περιφέρεια του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0$ και ακτίνα $r = \sqrt{2}$.	**Σ Λ**

24.	Δεν υπάρχει εξίσωση 3^{ου} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές που έχει ως ρίζες τους αριθμούς 1 + i, –i και i.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta$i είναι μηδενικός, όταν: α) $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ β) $\alpha = 0$ γ) $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ δ) $\alpha - \beta = 0$
2.	Αν $z =$ i, τότε: α) $z^2 = 1$ β) $\frac{1}{z} = -z$ γ) $z^2 =$ i δ) $z^2 = z$
3.	Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με τον αριθμό i^2 = –1 στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του κατά γωνία: α) π/2 β) π γ) 3π/2 δ) 3π/4
4.	Έστω z μια μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδας ($z \neq 1$). Τότε η παράσταση $1 + z + z^2$ είναι ίση με: α) 0 β) 1 γ) 3 δ) –1
5.	Μία τετραγωνική ρίζα του αριθμού – 4 είναι ο αριθμός: α) $z = -2$i β) $z = -2$ γ) $z = -2+$i δ) $z=2$
6.	Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = 3 + \sqrt{2}$ είναι ο: α) $\overline{z} = 2 - \sqrt{3}$ β) $\overline{z} = 3 + \sqrt{2}$ γ) $\overline{z} = 3 - \sqrt{2}$ δ) $\overline{z} = 3\sqrt{2}$
7.	Ο μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός, όταν: α) $z\overline{z} = 1$ β) $z + \overline{z} = 0$ γ) $\overline{\overline{z} - z} = 0$ δ) $z\overline{z} = 0$
8.	Η εξίσωση $z^2+3z+4=0$ έχει: α) Μία πραγματική ρίζα και μία μιγαδική ρίζα. γ) Δύο πραγματικές ρίζες. β) Δύο ρίζες που είναι καθαροί μιγαδικοί. δ) Δύο ρίζες που είναι φανταστικοί αριθμοί.
9.	Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν ορίσματα θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Ένα όρισμα του πηλίκου $\frac{z_1}{z_2}$ είναι το: α) $\theta_1+\theta_2$ β) $\theta_1-\theta_2$ γ) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ δ) $\theta_1 \cdot \theta_2$
10.	Δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 έχουν ορίσματα θ_1, θ_2 αντιστοίχως. Ένα όρισμα του γινομένου $z_1 \cdot z_2$ είναι το: α) $\theta_1+\theta_2$ β) $\theta_1-\theta_2$ γ) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ δ) $\theta_2\,\theta_1$
11.	Αν μία πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό –i, τότε το πολυώνυμο $P(z)$ έχει παράγοντα το: α) $z^2 - 2z + 2$ β) $z^2 + 2$ γ) $z^2 +$ i δ) $z^2 + 1$

12.	Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z, $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $\mathrm{i}z$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ η διανυσματική ακτίνα του $\mathrm{i}^2 z$ και $\overrightarrow{O\Delta}$ η διανυσματική ακτίνα του $-\mathrm{i}z$. Τότε: α) Η $\overrightarrow{O\Gamma}$ είναι διανυσματική ακτίνα του $\bar{z}$. γ) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. β) Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά. δ) Το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό.
13.	Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1=1, z_2=i, z_3=–1, z_4=–i βρίσκονται: α) Στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα 1. γ) Στον άξονα $y'y$. β) Στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα 2. δ) Στον άξονα $x'x$.
14.	Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται νιοστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού w, όταν για τον ακέραιο αριθμό $\nu>1$, ισχύει: α) $w^\nu = z$ β) $z^\nu = w$ γ) $z^\nu = w\mathrm{i}$ δ) $z^\nu = -w$
15.	Ένας μη μηδενικός αριθμός $\alpha = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + \mathrm{i}\,\eta\mu\,\theta)$ έχει: α) ν το πολύ νιοστές ρίζες. γ) Τουλάχιστον ν νιοστές ρίζες. β) Ακριβώς ν νιοστές ρίζες. δ) Ακριβώς ν^2 νιοστές ρίζες.

4.10 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές.

4.10.1. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει

$$-2 \le \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \le 2\,.$$

4.10.2. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z, w,$ για τους οποίους ισχύει

$$w = \frac{2+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$$

Να αποδείξετε ότι, αν $w \in \mathbb{R}$, τότε ο z είναι φανταστικός.

4.10.3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και z' με $|z| = |z'| = 1$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$u = \frac{z+z'}{1+zz'}$$

είναι πραγματικός.

4.10.4. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1+\mathrm{i})^{4\nu} - (1-\mathrm{i})^{4\nu}$, όπου ν ένας θετικός ακέραιος.

4.10.5. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta\mathrm{i})^{2008} = (\beta - \alpha\mathrm{i})^{2008}$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β.

4.10.6. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο ν ισχύει $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{-3\nu} = 1$.

4.10.7. Αφού γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ και $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^\nu + z_2^\nu, \nu \in \mathbf{N}$ είναι πραγματικός. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $z_1^{12} + z_2^{12}$.

4.10.8. Να γράψετε την ποσότητα $(\text{συν}\theta + \text{i}\,\text{ημ}\theta)^3$ στη μορφή $\alpha+\beta\,\text{i}$:

α) Με χρήση του τύπου De Moivre.

β) Με εκτέλεση πολλαπλασιασμών ή αναλυτικό υπολογισμό της τρίτης δύναμης.

Στη συνέχεια να αποδείξετε τις ταυτότητες $\text{συν}3\theta = 4\text{συν}^2\theta - 3\text{συν}\theta$, $\text{ημ}3\theta = 3\text{ημ}\theta - 4\text{ημ}^3\theta$.

4.10.9. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 7 + 8\text{i}$ και $z_2 = 4 - 5\text{i}$.
Αν $z = z_1 - \overline{z}_2$, να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z σε τριγωνομετρική μορφή και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό z^4.

4.10.10. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z. Αν ο αριθμός $u = \dfrac{z-4\text{i}}{z-2}$, με $z \neq 2$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και να βρείτε την εξίσωση της γραμμής αυτής.

4.10.11. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + y\text{i}$, για τον οποίο ισχύει η σχέση $z\overline{z} - 2(z+\overline{z}) = 0$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

4.10.12. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + y\text{i}$. Αν για τον αριθμό $u = 2\text{i}z + 1 + \text{i}$ ισχύει $|u| = 4$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

4.10.13. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 .$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, να βρείτε την τιμή της παράστασης $|\text{i}+z|^2 + |\text{i}-z|^2$ αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z| = 3$.

4.10.14. Ας συμβολίσουμε με A, B, Γ, Δ τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου τα οποία αντιστοιχούν στις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα.

α) Να δειχθεί ότι το σχήμα $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, αν και μόνο αν ισχύει $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$.

β) Να δειχθεί ότι το σχήμα $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αν και μόνο αν ισχύει $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ και $(z_3 - z_1)(\overline{z}_3 - \overline{z}_1) = (z_4 - z_2)(\overline{z}_4 - \overline{z}_2)$.

γ) Τι συμπέρασμα πρόκυπτει για το $AB\Gamma\Delta$ αν πέραν των ισοτήτων που δόθηκαν στο ερώτημα (β) ισχύει επιπλέον ότι $|z_2 - z_1| = |z_4 - z_1|$;

4.10.15. Στην ηλεκτρονική χρησιμοποιείται η συνάρτηση T του παλμού ω με τύπο

$$T(\omega) = \frac{z}{R + \text{i}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}, \ \omega>0$$

όπου z είναι ένας σταθερός μιγαδικός και R, L, C είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο παλμός ω εκφράζεται σε rad/sec.

α) Αν $h(\omega) = \dfrac{1}{R}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$, $\omega > 0$, να αποδείξετε ότι $T(\omega) = \dfrac{z}{R} \cdot \dfrac{1}{1 + \text{i}\,h(\omega)}$.

β) Να βρείτε την τιμή του ω που μηδενίζει το h.

γ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $1 + \text{i}h(\omega)$

4.10.16. Οι σύνθετες αντιστάσεις ενός κυκλώματος RLC δίνονται από τους τύπους

$$z_1 = R + \mathrm{i}L\omega \;\; \text{και} \;\; z_2 = R - \frac{\mathrm{i}}{\omega C},$$

όπου R, ω, L, C είναι πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε την αντίσταση z του κυκλώματος, αν οι αντιστάσεις z_1 και z_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα. Στην παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}.$$

β) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον αριθμό ω.

4.10.17. Δύο πλοία A και B κινούνται προς τον ίδιο προορισμό, η θέση του οποίου περιγράφεται (επάνω σε έναν χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_0 = 7 + 9\mathrm{i}$. Κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, το πλοίο A βρίσκεται σε μια θέση που αντιστοιχεί στην εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_1 = -2 + 3\mathrm{i}$, ενώ το πλοίο B σε μια θέση που αντιστοιχεί στην εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_2 = 3 - 2\mathrm{i}$.

α) Να βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων (επί του χάρτη).

β) Ποιο από τα δύο πλοία βρίσκεται πλησιέστερα στον προορισμό του τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή;

4.10.18. Η θέση τεσσάρων κινητών τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τους μιγαδικούς:

$z_1 = \text{συν}t + \mathrm{i}\,\text{ημ}t$, $z_2 = \text{συν}t - \mathrm{i}\,\text{ημ}t$, $z_3 = -\text{συν}t + \mathrm{i}\,\text{ημ}t$ και $z_4 = -\text{συν}t - \mathrm{i}\,\text{ημ}t$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t, τα 4 κινητά ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων και πιο συγκεκριμένα ότι κινούνται επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας 1.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των κινητών 1 και 3 είναι ίδια με την απόσταση των κινητών 2 και 4.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των κινητών 1 και 2 είναι ίδια με την απόσταση των κινητών 3 και 4.

δ) Να βρείτε μία τιμή του t, για την οποία οι αποστάσεις των κινητών 1 και 2, 2 και 4, 4 και 3, 3 και 1 είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

4.10.19. Τα σημεία τα οποία καλύπτονται από ένα radar A περιγράφονται από τις εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|z| < 5$. Τα σημεία, που καλύπτονται από ένα δεύτερο radar B περιγράφονται από τις εικονες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - 8| < 4$. Να βρείτε σημεία:

α) Τα οποία φωτίζονται και από τα δύο radar.

β) Τα οποία φωτίζονται μόνο από το radar A και όχι από το radar B.

γ) Τα οποία φωτίζονται μόνο από το radar B και όχι από το radar A.

δ) Τα οποία φωτίζονται από το ένα μόνο από τα δύο radar, δηλαδή από το A αλλά όχι από το B ή από το B αλλά όχι από το A.

4.10.20. Ένα πλοίο A κινείται ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται (επάνω σε έναν χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_1(z_1)$, όπου $z_1 = 3 + 3\mathrm{i}$. Ένα δεύτερο πλοίο B κινείται επίσης ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_2(z_2)$, όπου

$$z_2 = 2\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι πορείες των δύο πλοίων.

4.10.21. Ένα πλοίο A κινείται ευθύγραμμα με κατεύθυνση που περιγράφεται (επάνω σ' ένα χάρτη εφοδιασμένο με κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_\pi(z_\pi)$, όπου $z_\pi = -1+3\,\mathrm{i}$. Λόγω του κύματος που επικρατεί, το πλοίο παρασύρεται συνεχώς κατά τη διεύθυνση που περιγράφεται από τη διανυσματική ακτίνα του σημείου $M_\varkappa(z_\varkappa)$, όπου $z_\varkappa = -4+2\,\mathrm{i}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η πραγματική (συνισταμένη) κίνηση του πλοίου με τον οριζόντιο άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

4.10.22. Σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με δύο αντιστάσεις z_1, z_2 που είναι παράλληλα συνδεδεμένες, για την ολική αντίσταση z ισχύει

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}.$$

Αν $z_1 = 3+4\,\mathrm{i}$ και $z_2 = 1+\mathrm{i}$, να βρείτε την ολική αντίσταση του κυκλώματος σε τριγωνομετρική μορφή.

Κεφάλαιο Πέμπτο
Συναρτήσεις

5.9 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

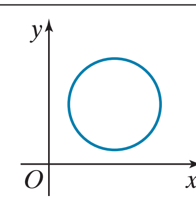
Ίσες συναρτήσεις $f = g$.	Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.
Βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο A.	$(f+g)(x)=f(x)+g(x), x\in A$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x), x\in A$ $(cf)(x)=cf(x), x\in A$ $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x), x\in A$ $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in A$ και $g(x)\neq 0$.
Συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο Δ. Συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο Δ.	$f(x_1)<f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ $f(x_1)>f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$.
Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. (ή συνάρτηση 1–1).	Για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $x_1=x_2$.
Άρτια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$.	Για οποιοδήποτε $x\in A$ έχουμε $-x\in A$ και επιπλέον ισχύει $f(-x)=f(x)$.
Περιττή συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$.	Για οποιοδήποτε $x\in A$ έχουμε $-x\in A$ και επιπλέον ισχύει $f(-x)=-f(x)$.
Περιοδική συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ με περίοδο τον θετικό αριθμό T.	Για οποιοδήποτε $x\in A$ έχουμε $x+T\in A$ και επιπλέον ισχύει $f(x+T)=f(x)$.
Σύνθεση της $f\colon A \to \mathbb{R}$ με την $g\colon B \to \mathbb{R}$.	$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ για όλα τα $x\in A$, για τα οποία $f(x)\in B$.
Αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}\colon f(A)\to A$ μιας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης f.	Αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f ($y\in f(A)$) στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $y=f(x)$. $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$
Βασικές ιδιότητες του πεπερασμένου ορίου στο $x_0\in\mathbb{R}$.	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

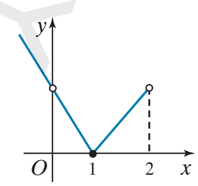
Βασικές ιδιότητες του πεπερασμένου ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$.	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ (όταν $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$) $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=\left\lvert\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right\rvert$ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\nu}$
Κριτήριο παρεμβολής.	Αν $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ κοντά στο x_0 και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.
Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ στο x_0.	$\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$
Όριο ρητής συνάρτησης $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ στο x_0 (όταν $Q(x_0)\neq 0$):	$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο x_0.	$\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu a x}{x}=a$
Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.	Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$, όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$. Η ευθεία με εξίσωση $y=\ell$, όπου $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$.
Κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.	Η ευθεία με εξίσωση $x=x_0$, όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, είναι $+\infty$ ή $-\infty$
Συνέχεια συνάρτησης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
Συνεχής συνάρτηση σε ανοικτό διάστημα (α,β).	Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
Συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.	Όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha),\quad\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$

Συνέχεια και πράξεις.	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις $f+g$, cf (με $c\in\mathbb{R}$), $f\cdot g$, $\lvert f\rvert$, $\dfrac{f}{g}$ (όπου $g(x_0)\neq 0$), $\sqrt[\nu]{f}$ (όπου $f(x_0)\geq 0$).
Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, και η g είναι συνεχής στο $f(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο Δ.
Συνεχείς βασικές συναρτήσεις.	– Πολυωνυμικές συναρτήσεις. – Ρητές συναρτήσεις. – Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. – $f(x)=a^x$. – $g(x)=\log_a x$, $0<\alpha\neq 1$.
Θεώρημα Bolzano.	Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.	Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\lambda$.

5.10 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το διάγραμμα του σχήματος 5.10α δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης  **Σχ. 5.10α**	**Σ Λ**
2.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3$. Η σύνθεση $h=f\circ f$ έχει τύπο $h(x)=x^6$.	**Σ Λ**
3.	Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν η ευθεία $y=a$ έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τη C_f.	**Σ Λ**
4.	Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{-x^2+5}{x^2+2}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5/2$.	**Σ Λ**
5.	Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια αυτών στο x_0, τότε ισχύει η ανισότητα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.	**Σ Λ**

6.	Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\lvert x-1\rvert}{x-1}$. Τότε η f δεν έχει όριο στο 0.	**Σ Λ**
7.	Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε $(f \circ g)(x) = -x$.	**Σ Λ**
8.	Αν $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^3}$, τότε $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$, ενώ δεν υπάρχει όριο της f στο 4.	**Σ Λ**
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^3+2x}\right)\right]=(\lim\limits_{x\to 0} x)\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3+2x}=0\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3+2x}=0$.	**Σ Λ**
10.	Αν $\dfrac{2}{x^4}\le f(x)\le \dfrac{2}{x^2}$, $x\in(1,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.	**Σ Λ**
11.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, τότε η f θα είναι συνεχής στο x_0.	**Σ Λ**
12.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x)\rvert=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.	**Σ Λ**
13.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, όπου $l,m \in \mathbb{R}$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) < g(x)$, τότε κατ' ανάγκη θα έχουμε $l\le m$.	**Σ Λ**
14.	Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-3x)^5}{x^3+1}$ είναι ίσο με $-\infty$.	**Σ Λ**
15.	Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0$.	**Σ Λ**
16.	Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 5.10β, είναι συνεχής στο $x_1=0$ και στο $x_2=1$.  **Σχ. 5.10β**	**Σ Λ**
17.	Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$.	**Σ Λ**
18.	Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.	**Σ Λ**
19.	Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Δ, διατηρεί το πρόσημό της σε ολόκληρο το διάστημα Δ.	**Σ Λ**
20.	Οι συνεχείς συναρτήσεις f διατηρούν το πρόσημό τους σε καθένα από τα διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού τους.	**Σ Λ**
21.	Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=2$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=e$.	**Σ Λ**

22.	Αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η εξίσωση $f(x^3) = f(-x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.	**Σ Λ**
23.	Το θεώρημα Bolzano αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών.	**Σ Λ**
24.	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι επίσης ένα ανοικτό διάστημα.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\left\|\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\right\|$ είναι το: α) $\mathbb{R}$ β) $\mathbb{R}-\{-1,1\}\}$ γ) $\mathbb{R}-\{1\}$ δ) $\mathbb{R}-\{2\}$
2.	Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με τύπους αντίστοιχα $f(x)=3x$, $g(x)=x^3-3$, $h(x)=3(x^3-1)$. Τότε: α) $h=f\circ g$ β) $h=g\circ f$ γ) $f=h\circ g$ δ) $g=h\circ f$
3.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2$. Η σύνθεση $h=f\circ f\circ f$ έχει τύπο: α) $h(x)=x^6$ β) $h(x)=x^8$ γ) $h(x)=x$ δ) $h(x)=x^2$
4.	Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^\rho}\right)$, όπου ρ ένας θετικός ακέραιος, είναι ίσο με: α) $+\infty$ β) $-\infty$ γ) 0 δ) 1
5.	Έστω $f(x)=-x^{10}+x^9-1000$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
6.	Αν $f(x)=e^{-x}$, τότε: α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
7.	Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{-x^2+5}{x^2+2}$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5/2$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=5/2$ γ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=5/2$ δ) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5/2$
8.	Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\text{ημ}(x/2)}{x}$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ β) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$ γ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

9.	Το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\lvert 2x-4\rvert}{5(x-2)}$ στο $x_0 = 0$ είναι ίσο με: α) –2 β) $\dfrac{5}{2}$ γ) $-\dfrac{5}{2}$ δ) 2
10.	Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 0$, τότε, κοντά στο x_0, θα ισχύει: α) $f(x) > 0$ β) $f(x) < 0$ γ) $f(x) = 0$ δ) $f(x) = x_0$
11.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-1$, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)-2g(x)]$ είναι ίσο με: α) 5 β) 1 γ) 2 δ) –5
12.	Αν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = 1$ είναι: α) Κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. γ) Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$. β) Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. δ) Τίποτε από τα προηγούμενα.
13.	Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x - 10$, $x>0$. Τότε: α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-10$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.
14.	Αν $P(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$, τότε: α) $\lim\limits_{x\to +\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$ β) $\lim\limits_{x\to -\infty} P(x)=\alpha_0$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} P(x)=\alpha_\nu$ δ) $\lim\limits_{x\to 0} P(x)=\alpha_\nu$
15.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε: α) Η $f(x)$ θα παίρνει θετικές τιμές ($f(x) > 0$) κοντά στο x_0. β) Η $f(x)$ θα παίρνει αρνητικές τιμές ($f(x) < 0$) κοντά στο x_0. γ) $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$. δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.
16.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε: α) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ β) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$ δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $-\infty$
17.	Μια συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: α) $f(x_1) < f(x_2)$, β) $f(x_1) > f(x_2)$, γ) $f(x_1) = f(x_2)$, δ) $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$.

18.	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε: α) Η συνάρτηση $g\,f$ είναι συνεχής στο x_0. γ) Η συνάρτηση $f\circ g$ είναι συνεχής στο x_0. β) Η συνάρτηση $g+f$ είναι συνεχής στο x_0. δ) Η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.
19.	Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη. Τότε η εξίσωση $f(x^2)=f(x)$: α) Έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0. γ) Έχει ως ρίζες τους αριθμούς 0 και 1. β) Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. δ) Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

5.11 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές.

5.11.1. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $-4x^2-3x+2\le f(x)\le -x^2-3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$2+x^3\le g(x)\le 1+\frac{1}{\text{συν}^2 2x} \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right) \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x).$$

5.11.2. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ β) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ γ) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

5.11.3. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x-2)(x^2-5x^2+1)$ και η συνάρτηση με τύπο

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha x+5, & x=1.\end{cases}$$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$.
β) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η συνάρτηση h να είναι συνεχής.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και της g.

5.11.4. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2+x-\dfrac{1}{x-2}$.

α) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.
β) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x(x+1))$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x(x+1))$.
γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)(f(x)-x(x+1))$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)(f(x)-x(x+1))$.

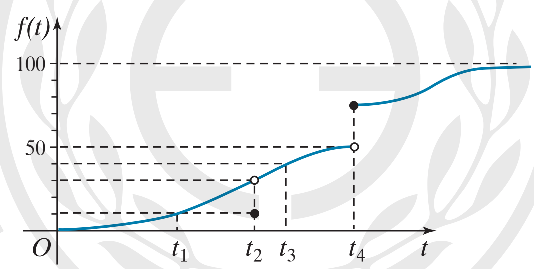
5.11.5. Έστω μια συνάρτηση f με τύπο $f(x)=6x^3+\alpha x^2-2x+\beta$.
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β έτσι ώστε τα σημεία (2, 25) και (1,0) να ανήκουν στη C_f.
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
γ) Να μετασχηματίσετε τον τύπο της συνάρτησης σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
δ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει $f(x)>0$.
ε) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f;

5.11.6. Σε δύο συνεχόμενα δωμάτια ενός κρουαζιερόπλοιου το ένα έχει θέρμανση, ενώ το άλλο δεν έχει. Όταν η πόρτα που τα συνδέει μείνει ανοικτή, για χρόνο t (σε min), οι θερμοκρασίες των δωματίων σε ^oC δίνονται από τις συναρτήσεις f_1 και f_2 με τύπους

$$f_1(t) = 30 - \frac{t^2}{50} \text{ και } f_2(t) = 15 + \frac{t}{10}.$$

α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων.
β) Ποια από τις δύο συναρτήσεις θα δίνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας στο δωμάτιο χωρίς θέρμανση;
γ) Τι πληροφορίες λαμβάνετε από την παρατήρηση των δύο γραφικών παραστάσεων;
δ) Σε πόση ώρα τα δωμάτια θα έχουν την ίδια θερμοκρασία και ποια είναι αυτή;
ε) Να βρείτε σε πόση ώρα η θερμοκρασία του δωματίου με θέρμανση θα φτάσει τους 10^oC.

5.11.7. Το σχήμα 5.11 παριστάνει το ποσοστό γνώσης $f(t)$ που έχει αποκτήσει κάποιος σπουδαστής της ΑΕΝ τη χρονική στιγμή t διαβάζοντας το αντίστοιχο διδακτικό εγχειρίδιο. Ποσοστό γνώσης 100% σημαίνει ότι ο σπουδαστής έχει κατανοήσει πλήρως το βιβλίο. Τη χρονική στιγμή t_2 ο φοιτητής διέκοψε το διάβασμα, για να λύσει μία άσκηση από την προηγούμενη ύλη. Τη χρονική στιγμή t_4 ο καθηγητής εξηγεί αναλυτικά στον σπουδαστή το περιεχόμενο του βιβλίου και ο σπουδαστής αρχίζει να κατανοεί καλύτερα αυτό που διαβάζει.
α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim\limits_{t\to t_1} f(t)$, $\lim\limits_{t\to t_2} f(t)$, $\lim\limits_{t\to t_4} f(t)$.
β) Ποιες χρονικές στιγμές η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής;
γ) Με τι είναι ίσο το όριο $\lim\limits_{t\to t_1} f(t)$ και ποια η φυσική του σημασία;



Σχ. 5.11

5.11.8. Ο λόγος των όγκων αντιψυκτικού και νερού που περιέχονται στο ψυγείο της μηχανής ενός αυτοκινήτου είναι 5/3.
α) Να βρείτε τη σχέση που δίνει τα y λίτρα του αντιψυκτικού που περιέχονται στο ψυγείο, ως συνάρτηση της χωρητικότητας του x.
β) Πόσα lt αντιψυκτικού θα περιέχονται σε ψυγείο χωρητικότητας 10 lt;
γ) Η θερμοκρασία της μηχανής δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 100 - 5x$, όπου x είναι τα lt του διαλύματος αντιψυκτικού και νερού που υπάρχουν στο ψυγείο. Να βρείτε τη θερμοκρασία της μηχανής, αν στο ψυγείο υπάρχουν 3 lt αντιψυκτικού.

5.11.9. Όταν ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια, συλλέγει $f(x)$ μονάδες παραγόμενου προϊόντος, οι οποίες δίνονται από τον τύπο: $f(x) = \alpha + \beta\,(1 - e^{-\lambda x}),\ x \ge 0$ (α, β, λ θετικές σταθερές).
α) Ποια είναι η φυσική σημασία της σταθεράς α;
β) Πόσες μονάδες προϊόντος θα συλλέξει ο γεωργός ρίχνοντας «άπειρη» ποσότητα λιπάσματος στην καλλιέργεια;

5.11.10. Η εταιρεία A πουλά κάποιο προϊόν με το κιλό. Θέλοντας να παρακινήσει τους πελάτες της σε μεγάλες αγορές, χρεώνει το ένα κιλό του προϊόντος, 40 €, αν η ποσότητα που αγοράζεται είναι κάτω από 8 kg, και 30 €, αν η ποσότητα είναι 8 ή περισσότερα κιλά.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή αγοράς x kg σε € και να εξετάσετε αν είναι συνεχής.

β) Τι παρατηρείτε για αγορές λίγο μικρότερες ή μεγαλύτερες των 8 kg;

5.11.11. Για να μελετήσουν τη δράση ενός νέου φάρμακου, κάποιοι επιστήμονες χορηγούν σε διάφορα άτομα συγκεκριμένη ποσότητα απ' αυτό και καταγράφουν τη συγκέντρωσή του y στο αίμα μετά από x ώρες. Προσπαθούν να βρουν ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει τη συγκέντρωση με τη μορφή μιας συνάρτησης $y = f(x)$ χρησιμοποιώντας τα εξής δεδομένα που προκύπτουν από τη μέχρι σήμερα εμπειρία τους:

α) Στην αρχή του πειράματος δεν υπάρχει καθόλου φάρμακο στον οργανισμό, δηλαδή $f(0) = 0$.

β) Η ζητούμενη συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής για $x \geq 0$, επειδή η μεταβολή της συγκέντρωσης στο αίμα γίνεται βαθμιαία.

γ) Ύστερα από πολύ χρόνο η συγκέντρωση του φάρμακου στον οργανισμό μηδενίζεται, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

δ) Μισή ώρα μετά τη λήψη του φαρμάκου η συγκέντρωση y είναι περίπου 83, ύστερα από 1 ώρα γίνεται περίπου 57%, ενώ μετά από 4 h είναι μόλις 18%.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{12x}{15x^2 + 5x + 1},\ x \geq 0$$

έχει όλες τις ιδιότητες που περιγράψαμε.

5.11.12. Ένας νέος εργαζόμενος παρουσιάζει απόδοση μετά από x ημέρες απασχόλησης σε μία συγκεκριμένη θέση, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = 10 + \frac{50x^2}{5x^2 + 50},\quad x \geq 0.$$

Θεωρήστε ότι ο δείκτης απόδοσης $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση του x.

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων κυμαίνεται ο δείκτης απόδοσης του εργάτη.

β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to 0} f(x)$ και να δώσετε την φυσική τους ερμηνεία.

γ) Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά ο τύπος

$$f(x) = 10 + \frac{50x^3}{5x^2 + 50},\quad x \geq 0$$

προκειμένου να περιγράψει την απόδοση του εργαζομένου μετά από x ημέρες απασχόλησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5.11.13. Ένα σώμα ρίπτεται τη χρονική στιγμή $t=0$ από την ταράτσα ενός ουρανοξύστη. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε m), ύστερα από t sec, δίνεται από τη συνάρτηση f, με τύπο

$$f(t) = \frac{1}{4}(-9t^2 + 144).$$

α) Σε ποιο ύψος θα βρίσκεται το σώμα ύστερα από 3 sec;

β) Ποιο είναι το ύψος του ουρανοξύστη;

γ) Πότε θα φτάσει το σώμα στο έδαφος;
δ) Σε πόσο χρόνο θα βρίσκεται το σώμα σε ύψος 27 m;

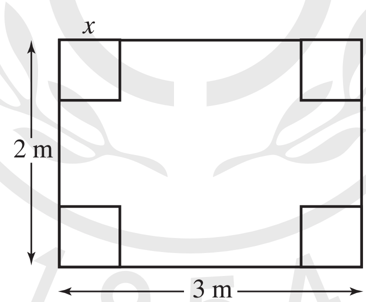
5.11.14. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου (^oC) μπορεί να βρεθεί, αν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) ως εξής: Από τους βαθμούς Φαρενάιτ αφαιρούμε 32 και πολλαπλασιάζουμε τη διαφορά με 5/9.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση *f* που να αντιστοιχίζει τους βαθμούς ^oF σε ^oC.
β) Να βρεθούν οι θερμοκρασίες σε ^oC που αντιστοιχούν σε -10, 0, 10 και 40 βαθμούς ^oF.

5.11.15. Η θέση-τροχιά δύο πλοίων περιγράφεται επάνω σε έναν ναυτικό χάρτη από τα σημεία $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ αντίστοιχα, όπου *f* και *g* είναι συναρτήσεις με τύπους

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+2}, \quad g(x)=\frac{x^4+1}{x+2}, \quad x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι οι τροχιές των πλοίων τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 1 και 2 ($1 \leq x \leq 2$).

5.11.16. Προκειμένου να κατασκευάσουμε μια μικρή δεξαμενή πλοίου σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, χρησιμοποιούμε ένα ορθογώνιο φύλλο λαμαρίνας διαστάσεων 2 m και 3 m όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Από κάθε κορυφή του ορθογωνίου, κόβουμε ένα τετράγωνο πλευράς *x* m και μετά, τσακίζοντας τις πλευρές, σχηματίζουμε ένα ανοικτό δοχείο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.
α) Να εκφράσετε τον όγκο $V(x)$ της δεξαμενής ως συνάρτηση του *x*.
β) Να βρείτε τα $V(1)$, $V(2/10)$, $V(3/10)$.
γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;



5.11.17. Η τιμή των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων πλοίων συνήθως μειώνεται πολύ γρήγορα με την πάροδο του χρόνου. Ας υποθέσουμε ότι ένα νέο εξάρτημα έχει αρχική τιμή 1000 € και ότι η τιμή του σε *x* μήνες, δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο

$$P(x)=600+\frac{1200}{x+3}.$$

α) Να βρείτε την τιμή του εξαρτήματος σε 6 μήνες από τη μέρα της κυκλοφορίας του.
β) Να βρείτε πότε η τιμή του εξαρτήματος θα γίνει 800 €.
γ) Τι θα συμβεί με την τιμή του μετά από πολλά χρόνια;

5.11.18. Δύο ακτοπλοϊκές εταιρείες εκτίμησαν ότι ξοδεύοντας *x* χιλιάδες € για διαφήμιση πετυχαίνουν ετήσιες επιβατικές κινήσεις, οι οποίες δίνονται (σε χιλιάδες) κατά προσέγγιση από τους τύπους:

$$S_1(x)=\frac{2000x^2}{2x^2+400} \quad \text{και} \quad S_2(x)=\frac{1000x^4}{2x^4+200}$$

αντίστοιχα.

α) Ποια από τις δύο εταιρείες πετυχαίνει καλύτερες ετήσιες επιβατικές κινήσεις ξοδεύοντας 5000 €;

β) Αν οι εταιρείες είχαν τη δυνατότητα να ξοδεύουν απεριόριστα χρήματα για διαφήμιση, ποια από τις δύο θα μπορούσε να πετύχει καλύτερη ετήσια επιβατική κίνηση;

5.11.19. Μια εταιρεία κατασκευής εξαρτημάτων πλοίων έχει ετήσια πάγια έξοδα 10.000 €, ενώ το κόστος κατασκευής μιας μονάδας του προϊόντος είναι 200 €.

α) Να βρείτε το μέσο κόστος $K_\varepsilon(x)$ ανά γεννήτρια όταν σ' ένα έτος κατασκευάζονται x μονάδες του προϊόντος.

β) Τι θα συμβεί όταν η εταιρεία κατασκευάζει πολύ λίγες μονάδες και τι όταν η εταιρεία κατασκευάζει απεριόριστα πολλές μονάδες σε ένα έτος;

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $K_\varepsilon(x)$.

Κεφάλαιο Έκτο

Παράγωγοι

6.8 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0.	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Πλευρικές παράγωγοι της f στο σημείο x_0.	$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ (x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f).	$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
Παράγωγος και συνέχεια.	Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, είναι και συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Παράγωγος και πράξεις (οι συναρτήσεις f και g των διπλανών τύπων θεωρούνται παραγωγίσιμες).	$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$ $(cf)'(x)=cf'(x)$ $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (για $g(x)\neq 0$)
Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης.	$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$
Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ.) και Θεώρημα Rolle.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (Θ.Μ.Τ.). Αν επιπλέον ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $f(\xi)=0$ (Θεώρημα του Rolle).
Συνεχής συνάρτηση f με μηδενική παράγωγο στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ.	Η f θα είναι σταθερή σε όλο το Δ.
Συνεχείς συναρτήσεις f, g με ίσες παραγώγους στα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ.	Οι f και g θα διαφέρουν κατά μία σταθερά $c\in\mathbb{R}$, δηλαδή: $f(x)=g(x)+c,\quad x\in\Delta$.

Παράγωγος και μονοτονία.	α) Αν $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα) στο Δ. β) Αν $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα (φθίνουσα) στο Δ.
Η f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο.	$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap \Delta$ (για κάποιο ανοικτό διάστημα Δ).
Η f, με πεδίο ορισμού το σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο.	$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap \Delta$ (για κάποιο ανοικτό διάστημα Δ).
Θεώρημα του Fermat.	Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0)=0$.
Υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A.	α) Τα άκρα του A (αν ανήκουν σε αυτό). β) Τα εσωτερικά σημεία του Α, στα οποία η f είτε δεν παραγωγίζεται (ενώ όμως είναι συνεχής), είτε παραγωγίζεται και η παράγωγός της μηδενίζεται (κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f).
Εύρεση ακροτάτων μιας συναρτήσεως f ορισμένης στο διάστημα (α, β).	α) Αν $f'(x) > 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0. β) Αν $f'(x) < 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.
Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου.	α) Αν $f'(x_0) = 0$ και ισχύει $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0. β) Αν $f'(x_0) = 0$ και ισχύει $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.
Κυρτή συνάρτηση f στο Δ.	Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ ($f''(x_0) > 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ).
Κοίλη συνάρτηση f στο Δ.	Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ ($f''(x_0) < 0$ στα εσωτερικά σημεία του Δ).
Σημείο καμπής $A(x_0, f(x_0))$ μιας συνάρτησης f.	Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
Κανόνας του L' Hospital.	Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Μερική παράγωγος της $z = f(x,y)$ ως προς x.	$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ ή $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ή $f_x(x,y)$

Μερική παράγωγος της $z = f(x,y)$ ως προς y.	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ ή $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ή $f_y(x,y)$

6.9 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(0) = 0, f'(0) = 1$, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (0,0) είναι η $y=0$.	**Σ Λ**
2.	Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0.	**Σ Λ**
3.	Έστω x_0 ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f παραγωγίσιμης στο x_0. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε θα ισχύει απαραίτητα $f'(x_0)=0$.	**Σ Λ**
4.	Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.	**Σ Λ**
5.	Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.	**Σ Λ**
6.	Αν $f'(x) = (x-3)^2 (x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $f'(-1)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.	**Σ Λ**
7.	Αν $f(x) = 2^{3x}$, τότε $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x}$.	**Σ Λ**
8.	Αν $f'(x) = (x^3-1)^3$, τότε η δέκατη παράγωγος της f στο 0 ισούται με μηδέν.	**Σ Λ**
9.	Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\beta) > f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει $f'(x_0) > 0$.	**Σ Λ**
10.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 0$.	**Σ Λ**
11.	Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ισχύει $f'(x) > 0$ για $\alpha < x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x_0 < x < \beta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.	**Σ Λ**
12.	Αν για μια συνάρτηση ισχύει $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.	**Σ Λ**
13.	Αν $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$, τότε για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $[(f(x))^2+(g(x))^2]' = 0$.	**Σ Λ**
14.	Αν $f(x) = x^3$, τότε $x(f(2x))' = f(2x)$.	**Σ Λ**
15.	Αν $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$ τότε $f'' = -f$ και $g'' = -g$.	**Σ Λ**
16.	Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell - 1$ και $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + 1$, τότε $f'(x_0) = \ell$.	**Σ Λ**
17.	Η συνάρτηση $f(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.	**Σ Λ**

18.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.	**Σ Λ**
19.	Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.	**Σ Λ**
20.	Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.	**Σ Λ**
21.	Ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο σημαίνει ότι το σημείο αυτό είναι απαραίτητα τοπικό ακρότατο της f.	**Σ Λ**
22.	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε υπάρχει η παράγωγος της f / g στο x_0 και ισχύει: $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad (\text{για } g(x_0) \neq 0).$$	**Σ Λ**
23.	Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $$(f \circ g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x).$$	**Σ Λ**
24.	Δίνεται μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε για τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{5x}}$ ισχύει $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	**Σ Λ**
25.	Αν η θέση ενός κινητού δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = 5 + t - t^3$, τότε η επιτάχυνσή του διατηρείται σταθερή.	**Σ Λ**
26.	Η μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y) = 2x + 3y$ ως προς x είναι ίση με τη μερική παράγωγο της f ως προς y, για κάθε x, y.	**Σ Λ**
27.	Αν $f(x,y) = xy$, τότε $f(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.	**Σ Λ**
28.	Αν $f(x,y) = x^2 y^3 + 2$, τότε $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση: α) $y = x + f'(0)$ β) $y = x f'(0)$ γ) $y = f'(0)$ δ) $y = x$
2.	Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^\nu$ είναι ίση με: α) $x^{\nu-1}$ β) $\nu x^{\nu-1}$ γ) νx^ν δ) $(\nu - 1) x^\nu$
3.	Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι ίση με: α) $\ln x$ β) $-\dfrac{1}{x^2}$ γ) e^x δ) $\dfrac{1}{x}$

4.	Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = ημ^2 x$ είναι ίση με: α) $f'(x) = 2συνx$ β) $f'(x) = 2ημx$ γ) $f'(x) = 2ημx \cdot συνx$ δ) $f'(x) = 2συνx$
5.	Ποιος από τους επόμενους τύπους είναι σωστός; α) $(e^x)'=e^{x-1}$ β) $(\ln\|x\|)'=\dfrac{1}{\|x\|}$ γ) $(x^a)'=ax^{a-1}$ δ) $(a^x)'=a^x$
6.	Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε: α) $f'(x_0)=1$ β) $f'(x_0)<0$ γ) $f'(x_0)>0$ δ) $f'(x_0)=0$
7.	Ποια από τις επόμενες συναρτήσεις **δεν** είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της; α) $f(x)=e^x$ β) $f(x)=x^3$ γ) $f(x)=x^4$ δ) $f(x)=3^x$
8.	Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \|x\|$: α) Είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι και συνεχής σ’ αυτό. β) Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. γ) Είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη σ’ αυτό. δ) Είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.
9.	Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο $(α, β)$ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (α, β)$. Αν $f(α) = 0$ και $f(β) = 10$, τότε η εξίσωση $f(x)=5$: α) Έχει μοναδική λύση στο $(α, β)$. β) Έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $(α, β)$. γ) Έχει το πολύ μία λύση στο $(α, β)$. δ) Δεν έχει λύση στο $(α, β)$.
10.	Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι: α) Θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. β) Θέσεις τοπικών μεγίστων της f. γ) Υποψήφιες θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. δ) Θέσεις τοπικών ελαχίστων της f.
11.	Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ και ισχύει $f(0) =1$. Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (-1,1)$, τότε: α) Θα ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. β) Θα ισχύει $f(x)=1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. γ) Θα ισχύει $f(x)>1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. δ) Θα ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.
12.	Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης ενός κινητού είναι ίσος με: α) Τη μέση επιτάχυνση του κινητού. β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού. γ) Τη μέση ταχύτητα του κινητού. δ) Τη στιγμιαία επιτάχυνση του κινητού.

13.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x-1)(x+1)$, τότε: α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$. β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+1]$. γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+1]$. δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.
14.	Αν $S(t)$ η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με: α) $\upsilon(t)=S'(t)$ και $a(t)=\upsilon'(t)$ αντίστοιχα. β) $\upsilon(t)=S''(t)$ και $a(t)=S'(t)$ αντίστοιχα. γ) $\upsilon(t)=S'(t)$ και $a(t)=\upsilon''(t)$ αντίστοιχα. δ) $\upsilon(t)=S''(t)$ και $a(t)=\upsilon'(t)$ αντίστοιχα.
15.	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) =(x-1)^3 + (x-2)^5$, τότε: α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. β) Η f είναι κυρτή. γ) Η f είναι κοίλη. δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

6.10 Γενικές ασκήσεις.

6.10.1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln|x| = \frac{1}{2}x$ έχει μία μοναδική λύση.
δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln|x| = -x$ έχει μία μοναδική λύση.

6.10.2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=3-2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της f, αν υπάρχουν.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a>3$, είναι αδύνατη.
ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις αυτές.

6.10.3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3(2-x)^3$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να εξετάσετε σε ποια διαστήματα η f είναι κυρτή και σε ποια κοίλη. Να διαπιστώσετε επίσης ότι οι ρίζες της f είναι σημεία καμπής.
γ) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f, αν υπάρχουν.
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a>1$, είναι αδύνατη.
στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=a$, όπου $a<1$, έχει ακριβώς δύο λύσεις.

6.10.4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{2}+1$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f, αν υπάρχουν.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x - x + 2 = \ln 2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

6.10.5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=a^x+2^x$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $0<a\neq 1$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$.
β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι, αν η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0=0$, τότε η τιμή του a είναι ίση με $1/2$.

6.10.6. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1=0$, $x_2=1$ και $x_3=2$. Στη συνέχεια να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να εξεταστεί σε ποια διαστήματα είναι κυρτή και σε ποια κοίλη.

6.10.7. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=xe^x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^x$.

α) Να διαπιστώσετε ότι ισχύουν οι τύποι $f'(x)=f(x)+e^x$, $g'(x)=f(x)+g(x)$.
β) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος ν-οστής τάξης της συνάρτησης f δίνεται από τον τύπο $f^{(\nu)}(x)=(x+\nu)e^x$.
γ) Να βρείτε την παράγωγο ν-οστής τάξης της συνάρτησης g.

6.10.8. Έστω μια κυρτή συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $x_1<x_2$ δύο σημεία του Δ.

α) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ_1 τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)=2\cdot\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

β) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ_2 τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_2)=2\cdot\frac{f(x_2)-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-x_1}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

6.10.9. Σε ένα πείραμα τύχης με δύο δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία (ε) ή αποτυχία (α), η πιθανότητα να εμφανιστεί το αποτέλεσμα ε είναι ίση με p $(0<p<1)$, ενώ η πιθανότητα να εμφανιστεί το αποτέλεσμα α είναι ίση με $1-p$. Από τη θεωρία πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι σε ένα τέτοιο πείραμα, η πιθανότητα να εμφανιστούν $\varkappa$ επιτυχίες σε ν επαναλήψεις του δίνεται από τον τύπο

$$f(p)=\binom{\nu}{\varkappa}p^{\varkappa}(1-p)^{\nu-\varkappa}.$$

Να αποδείξετε ότι η παραπάνω πιθανότητα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $p=\varkappa/\nu$.

6.10.10. Ένα κινητό κινείται επάνω σε έναν οριζόντιο άξονα και η ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$\upsilon(t)=(t-2)^2(t-3), \quad 0\le t\le 4.$$

α) Να βρείτε την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t.
β) Να βρείτε σε ποιες χρονικές στιγμές το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν.
γ) Να βρείτε πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά.
δ) Να βρείτε πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

6.10.11. Ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο

$$P(I)=\frac{I}{\alpha+\beta I},\ I\ge 0,$$

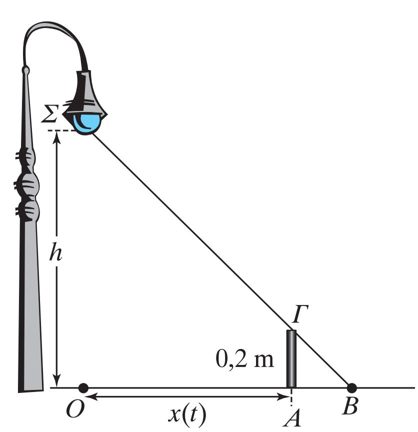
όπου I η ένταση του φωτός και α, β θετικές σταθερές. Η παράγωγος του ρυθμού φωτοσύνθεσης λέγεται *φωτοχημική ικανότητα* του φυτού.
α) Να βρείτε τη φωτοχημική ικανότητα του φυτού για μηδενική ένταση του φωτός.
β) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τη φωτοχημική ικανότητα ενός φυτού.
γ) Να αποδείξετε ότι η φωτοχημική ικανότητα ενός φυτού είναι φθίνουσα συνάρτηση της έντασης I του φωτός.
δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $P'(I)/[1-\beta P(I)]^2$ δεν εξαρτάται από το I.

6.10.12. Ένα άτομο βρίσκεται στη θέση A του σχήματος (σχ. 6.10α) και κινεί με σταθερή ταχύτητα 10 m το λεπτό μία κατακόρυφη ράβδο μήκους 0,2 m. Παρατηρώντας τη σκιά ΑΒ της ράβδου που σχηματίζεται λόγω μιας λάμπας που είναι τοποθετημένη σε ύψος h από το έδαφος, βρίσκει ότι η ταχύτητα με την οποία αυξάνεται η σκιά είναι 1 m/min.

α) Να αποδείξετε ότι

$$x(t)=\frac{h-0{,}2}{0{,}2}s(t).$$

β) Να βρείτε το ύψος h, στο οποίο είναι τοποθετημένη η λάμπα.



Σχ. 6.10α

6.10.13. Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου όταν αυτό κινείται με ταχύτητα x km/h δίνεται από τον τύπο:

$$f(x)=a(50x^2-\frac{x^3}{3}), \quad 0\le x\le 150,$$

όπου a είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.
α) Να μελετήσετε στη συνάρτηση f όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.
β) Να βρείτε σε ποια ταχύτητα x $(0\le x\le 150)$ το αυτοκίνητο παρουσιάζει τη μεγαλύτερη κατανάλωση.

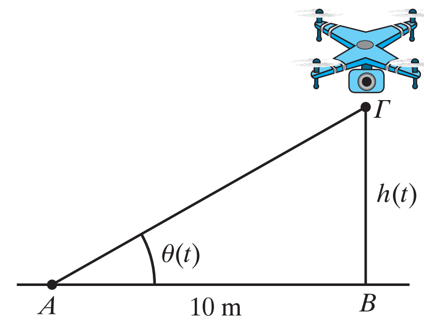
6.10.14. Ένα drone αφήνει το έδαφος σε απόσταση $AB=10$ m από έναν παρατηρητή A και κινείται προς τα επάνω με σταθερή ταχύτητα 20 m/min. Έστω Γ η θέση του τη χρονική στιγμή t. Συμβολίζουμε με $\theta(t)$ τη γωνία που σχηματίζει η $A\Gamma$ με το έδαφος (σχ. 6.10β).

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $h(t)$ και $\theta(t)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\theta'(t) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)$.

γ) Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το drone βρίσκεται σε ύψος 10 m από το έδαφος.

δ) Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση του drone από τον παρατηρητή γίνεται 20 m.



Σχ. 6.10β

6.10.15. Η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από τον ανθρώπινο οργανισμό μετά την παρέλευση χρόνου t από τη στιγμή που χορηγήθηκε, δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = 2e^{-\frac{t}{100}} \quad t \geq 0.$$

Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t, κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από τον ανθρώπινο οργανισμό είναι ίσος με το 1/10 του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$.

6.10.16. Ένας τυπογράφος θέλει να τυπώσει ένα βιβλίο, σε κάθε σελίδα του οποίου:

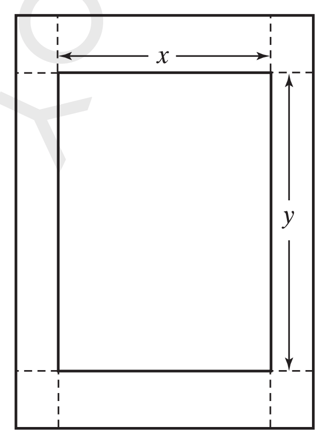
- Να αφεθεί επάνω και κάτω περιθώριο 3 cm και στα δύο πλάγια (αριστερά και δεξιά) περιθώριο 2 cm.
- Το τυπωμένο μέρος της σελίδας να έχει εμβαδόν 294 cm^2.

Συμβολίζουμε με x το πλάτος του τυπωμένου μέρους της σελίδας και με y το μήκος του (σχ. 6.10γ).

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της σελίδας δίνεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο

$$E(x) = 6x + \frac{1176}{x} + 318 .$$

β) Να βρείτε τις διαστάσεις x,y του τυπωμένου μέρους, ώστε να έχουμε την ελάχιστη κατανάλωση χαρτιού.



Σχ. 6.10γ

6.10.18. Μια μικρή βιομηχανία παράγει κλειδαριές για καμπίνες επιβατικών πλοίων. Το κόστος $K(x)$, σε €, για την παραγωγή x κλειδαριών σε μία ημέρα δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

$$K(x) = 200 + 80x - \frac{x^2}{3}, \quad x \in [0, 200],$$

ενώ οι εισπράξεις της βιομηχανίας σε € από την πώληση των x κλειδαριών δίνονται από τη σχέση

$$E(x) = 70x + \frac{x^2}{2} .$$

α) Να βρείτε τον αριθμό $K'(10)$ και να δώσετε την οικονομική ερμηνεία του.

β) Να βρείτε το κόστος παραγωγής της 5$^{\eta\varsigma}$ κλειδαριάς (σε κάποια ημέρα).

γ) Να βρείτε τον αριθμό $E'(10)$ και να δώσετε την οικονομική ερμηνεία του.

δ) Να βρείτε τον αριθμό $P'(10)$, όπου $P'(x)$ είναι το καθαρό κέρδος από την πώληση x κλειδαριών.

ε) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο πλήθος κλειδαριών που μπορούν να κατασκευάζονται ημερήσια, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης να είναι ίσοι.

6.10.19. Η τιμή $P(t)$ (σε €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 10 + 6\frac{e^{-(t-3)}}{1+2e^{-(t-3)}} .$$

α) Ποια είναι η φυσική σημασία του αριθμού $P(0)$;

β) Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται.

γ) Ποια θα είναι η τιμή του προϊόντος μετά από πάρα πολύ χρόνο;

6.10.20. Η ένταση E ενός ηλεκτρικού πεδίου δίνεται με τη βοήθεια συνάρτησης δυναμικού V από τον τύπο

$$E = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

όπου $V(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial z}$.

β) Να υπολογίσετε την ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο (1, 1, 1).

6.10.21. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο τόπο η θερμοκρασία του νερού x μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας κατά την t μέρα του χρόνου, δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση δύο μεταβλητών $w(x,t) = \cos(5t - 2x)\, e^{0{,}2x}$. Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial x}$ και να δώσετε τη φυσική τους ερμηνεία.

6.10.22. Κατά τη λειτουργία μιας αντλίας της καρδιάς ενός ανθρώπινου οργανισμού, το μηχανικό έργο W που παράγεται δίνεται από τη σχέση

$$W(P,V,\delta,\upsilon,g) = PV + \frac{V\delta}{2g}\upsilon^2 ,$$

όπου P είναι η μέση πίεση του αίματος, V ο όγκος του αίματος που αντλείται σε μία χρονική μονάδα, δ το ειδικό βάρος του αίματος, υ η μέση ταχύτητα του αίματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial W}{\partial P}, \frac{\partial W}{\partial V}, \frac{\partial W}{\partial \delta}$.

β) Αν μέλη της ιατρικής ομάδας της Πολεμικής Αεροπορίας θέλουν να εκτιμήσουν την ευαισθησία του έργου W (δηλ. πόσο εύκολα μεταβάλλεται η τιμή του) ως προς την επιτάχυνση g της βαρύτητας εξαιτίας των ελιγμών πτήσεων, ποια μερική παράγωγο θα έπρεπε να υπολογίσουν; Να υπολογίσετε την παράγωγο αυτή (θεωρώντας σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές που δεν σας ενδιαφέρουν). Τι παρατηρείτε; Να εκφράσετε την προσωπική σας άποψη.

6.10.23. Ένα έμβολο κινείται πάνω-κάτω στον κύλινδρο μιας ντηζελομηχανής και η απομάκρυνσή του από την κορυφή του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $S(t) = 3 - 2\eta\mu\, t$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του εμβόλου για κάθε χρονική στιγμή t.

β) Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η ταχύτητα του εμβόλου γίνεται μηδέν. Τι συμβαίνει κατά τις χρονικές αυτές στιγμές;

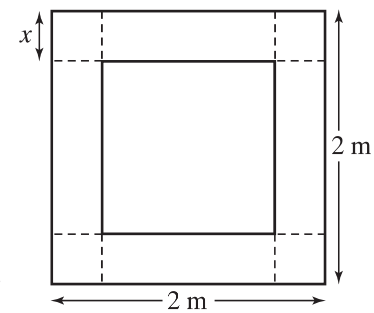
6.10.24. Από μια δεξαμενή βυθισμένου πλοίου διαρρέει πετρέλαιο. Ο όγκος του πετρελαίου, σε λίτρα, που απομένει στη δεξαμενή, t ώρες μετά την έναρξη της διαρροής, δίνεται από τον τύπο $V(t)=10\cdot(20-t)^3$.

α) Να βρείτε τον ρυθμό μείωσης του όγκου του καυσίμου στη δεξαμενή μετά από 3 ώρες και μετά από 5 ώρες.

β) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή.

γ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μείωσης του όγκου του καυσίμου στη δεξαμενή μία ώρα πριν αυτή αδειάσει.

6.10.25. Από φύλλο λαμαρίνας που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2 m θέλουμε να κατασκευάσουμε ανοιχτό δοχείο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, κόβοντας από τις 4 γωνίες του ίσα τετράγωνα, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.10δ. Να βρείτε την πλευρά x του τετραγώνου, ώστε το δοχείο που θα κατασκευάσουμε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.



Σχ. 6.10δ

6.10.26. Η βάση μιας δεξαμενής καυσίμου σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου έχει μήκος 10 m και πλάτος 5 m. Η παροχή καυσίμου στη δεξαμενή είναι τέτοια, ώστε το ύψος z του νερού τη χρονική στιγμή t να δίνεται (σε cm) από τον τύπο $z(t)=0{,}2t^2$. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου V του νερού τη χρονική στιγμή $t_0=5$ sec.

6.10.27. Η απόδοση μιας συγκεκριμένης μηχανής «εισόδου-εξόδου» τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$E(t)=2-\frac{3T_{out}(t)}{4T_{in}(t)},$$

όπου $T_{in}=T_{in}(t)$ είναι η θερμοκρασία «εισόδου» και $T_{out}=T_{out}(t)$ η θερμοκρασία «εξόδου» σε βαθμούς Κελσίου (^0C). Αν η θερμοκρασία T_{in} αυξάνεται με ρυθμό $6^{\circ}\mathrm{C/min}$, ενώ η απόδοση $E(t)$ δεν μεταβάλλεται, δηλαδή ισχύει $E(t)=E$ για κάθε t, να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας T_{out} ως συνάρτηση του E.

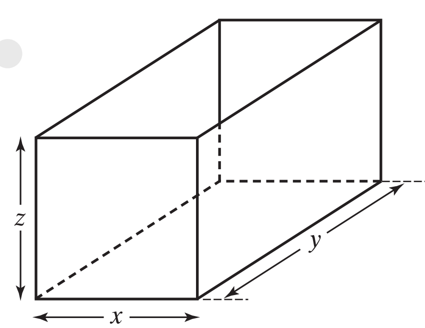
6.10.28. Μια δεξαμενή πλοίου έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με ακμές μήκους x, y, z (σχ. 6.10ε). Το επάνω μέρος της δεξαμενής είναι ανοιχτό.

α) Να δώσετε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τον όγκο της δεξαμενής.

β) Να δώσετε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τη συνολική επιφάνεια της δεξαμενής.

γ) Αν ο όγκος της δεξαμενής είναι 5 m^3, να δώσετε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τη συνολική επιφάνεια της δεξαμενής.

δ) Αν η συνολική επιφάνεια της δεξαμενής είναι 10 m^2, να δώσετε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία να περιγράφει τον όγκο της δεξαμενής με χρήση μόνο των x και y.



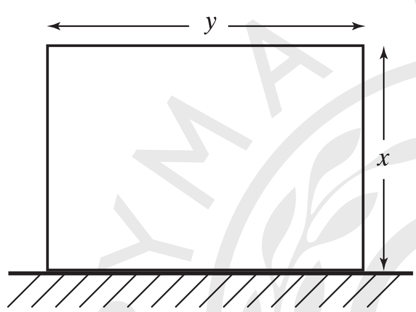
Σχ. 6.10ε

6.10.29. Σε ένα πλοίο αποφασίστηκε να αντικατασταθεί η παλιά περίφραξη ενός καταστρώματος με νέα. Για την περίφραξη των τριών πλευρών του καταστρώματος, το οποίο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.10στ, πρόκειται να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό κάγκελο, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται και το αντίστοιχο κόστος ανά μέτρο.

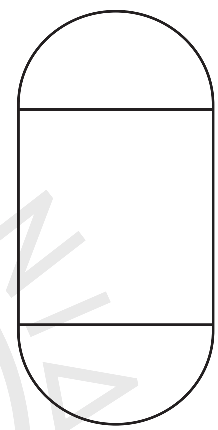
Πιο συγκεκριμένα, η πλευρά μήκους y πρόκειται να κατασκευαστεί από κάγκελο που κοστίζει 20€ το μέτρο, ενώ οι πλευρές μήκους x από κάγκελο που κοστίζει 30 € το μέτρο. Αν το συνολικό ποσό που θα διατεθεί είναι 1000 €, να βρείτε τις διαστάσεις x και y του ορθογωνίου που μπορεί να περιφραχτεί, ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

6.10.30. Ένα φινιστρίνι πλοίου αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από δύο ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.4ιζ. Αν η περίμετρός του είναι 1 m, πώς πρέπει να κατασκευάσουμε το παράθυρο για να έχουμε τον μεγαλύτερο δυνατό φωτισμό;

6.10.30. Ένα πλοίο ακολουθεί πορεία, της οποίας οι συντεταγμένες (σε ένα σύστημα συντεταγμένων) ικανοποιούν την εξίσωση $y=3x^2$. Να εντοπίσετε σε ποιο σημείο της πορείας του θα βρεθεί πιο κοντά σε έναν φάρο που είναι τοποθετημένος στη θέση $A(2,3)$.



Σχ. 6.10στ



Σχ. 6.10ζ

Κεφάλαιο ΄Εβδομο
Ολοκληρώματα

7.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

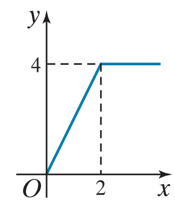
Αρχική συνάρτηση ή αντιπαράγωγος ή παράγουσα της f στο Δ.	Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση F στο Δ για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
Αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ.	$\int f(x)dx = F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$ όπου F είναι μία παράγουσα της f.
Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.	$\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το αόριστο ολοκλήρωμα.	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση για το αόριστο ολοκλήρωμα.	$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$, όπου $u=g(x)$ και $du=g'(x)dx$.
Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α έως το β.	$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta)-G(\alpha) = [G(x)]_\alpha^\beta$ όπου G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.
Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.	$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx$ $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$ $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$ $\left\lvert\int_\alpha^\beta f(x)dx\right\rvert \leq \int_\alpha^\beta \lvert f(x)\rvert dx$ Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.
Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.	$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$ όπου G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.
Παράγωγος της συνάρτησης $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$	$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = F'(x) = f(x)$

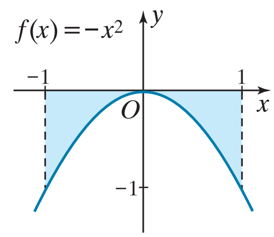
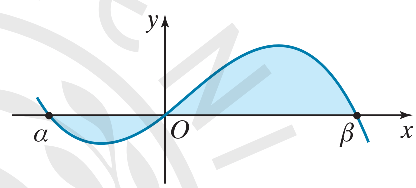
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες για τα ορισμένα ολοκληρώματα.	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση για τα ορισμένα ολοκληρώματα.	$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$.
Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.	Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(\xi) = \mu_f = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta - \alpha}$.
Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της μη αρνητικής συνάρτησης f, από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha, x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha, x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \lvert f(x) - g(x) \rvert dx$
Όγκος V ενός στερεού που δημιουργείται από περιστροφή του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$, $x = \beta$ και από τον άξονα $x'x$.	$V_f = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx$
Όγκος V ενός στερεού που δημιουργείται από περιστροφή του χωρίου Ω, που περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, και από τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$.	$V_{f,g} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$
Μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το α έως το β.	$l_f = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

7.8 Ερωτήσεις κατανόησης.

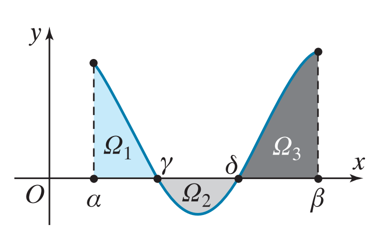
Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός, ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} \lvert x^2 - 1 \rvert dx$ είναι ίσο με 0.	**Σ Λ**
2.	Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με $x \ln x - x + c$.	**Σ Λ**
3.	Το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{2 \ln x}{x} dx$ είναι ίσο με $\ln^2 x + c$.	**Σ Λ**

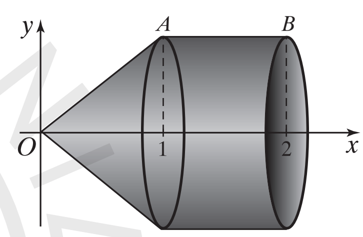
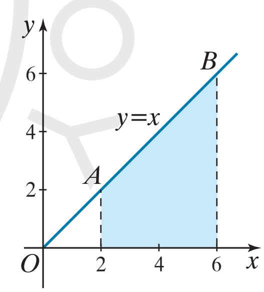
4.	Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in[-2,2]$ και $f(1)=g(1)+1$, τότε για κάθε $x\in[-2,2]$ ισχύει $g(x)=f(x)-1$.	**Σ Λ**
5.	Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του σχήματος 7.8α. Τότε $F'(2)=4$.  *Σχ. 7.8α*	**Σ Λ**
6.	Για το αόριστο ολοκλήρωμα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f ισχύει η ισότητα $$\int f(x)dx = xf(x)-\int xf'(x)dx\,.$$	**Σ Λ**
7.	Έστω f,g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει $$\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$	**Σ Λ**
8.	Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$, τότε θα ισχύει $$f(x)\le g(x) \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$	**Σ Λ**
9.	Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.	**Σ Λ**
10.	Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$	**Σ Λ**
11.	Ισχύει $\int_{-a}^{\alpha}(x^4-2x)dx\le\int_{-a}^{\alpha}(x^4-2x+x^{10}e^{-x^2})dx$, για κάθε $\alpha>0$.	**Σ Λ**
12.	Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $$\int_\alpha^\beta f'(x)xdx=[f(x)x]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$	**Σ Λ**
13.	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε και οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+e^x$ είναι παράγουσες της f.	**Σ Λ**
14.	Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο Δ, τότε για κάθε $x_0,x_1\in\Delta$ ισχύει: $$f(x_1)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f'(x)dx\,.$$	**Σ Λ**
15.	Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει: $$\int f'(x)dx=f(x)-c\;,\;c\in\mathbb{R}.$$	**Σ Λ**

16.	Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(\xi) = 0$ για ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$.	**Σ Λ**
17.	Αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ ή $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.	**Σ Λ**
18.	Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 7.8β είναι ίσο με $\int_{1}^{-1} f(x)dx = E(\Omega)$.  **Σχ. 7.8β**	**Σ Λ**
19.	Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του σχήματος 7.8γ είναι ίσο με $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\beta} f(x)dx$.  **Σχ. 7.8γ**	**Σ Λ**
20.	Το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\, dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ και τον άξονα των x.	**Σ Λ**
21.	Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με συνεχή παράγωγο. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ από το α έως το β δίνεται από τον τύπο: $$l_f = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\lvert 1 + f'(x) \rvert}\, dx.$$	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1-x} dx$ είναι ίσο με: α) $\ln(1-x) + c$ β) $\ln(x-1) + c$ γ) $\ln\lvert 1-x \rvert + c$ δ) $\ln\lvert x \rvert + c$
2.	Αν $f(x) = ημx$ και $f(0) = 1$, τότε το $f(\pi)$ ισούται με: α) 0 β) 1 γ) 2 δ) –1
3.	Έστω η συνάρτηση f του σχήματος 7.8δ. Αν τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2, Ω_3 είναι ίσα με 3, 1, 2 αντίστοιχα, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ισούται με: α) 4 β) 6 γ) –1 δ) 2  **Σχ. 7.8δ**

4.	Αν $\int_0^2 (4f(x)-3)dx = 0$, τότε η μέση τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα [0,2] είναι ίση με: α) $\mu_f = \frac{3}{4}$ β) $\mu_f = \frac{3}{8}$ γ) $\mu_f = \frac{4}{3}$ δ) $\mu_f = 3$
5.	Η μέση τιμή της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι ίση με: α) $(\alpha + \beta)/2$ β) μηδέν γ) c δ) $\alpha + \beta$
6.	Αν F, G είναι παράγουσες της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ, τότε: α) Η διαφορά $F - G$ είναι σταθερή συνάρτηση στο Δ. β) Ισχύει $F' = G$ και $G' = F$. γ) Το γινόμενο $F' \cdot G$ είναι σταθερή συνάρτηση στο Δ. δ) Η διαφορά $F - G$ είναι ίση με $f - g$.
7.	Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f(0) = g(0) + 1$, τότε: α) Θα ισχύει $f(x) = g(x) - 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. β) $\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = 1$. γ) $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. δ) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.
8.	Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0,1]$ και τον άξονα των x είναι ίσο με: α) $\int_0^1 (x^2 - x)\, dx$ β) μηδέν γ) $\int_0^1 (x - x^2)\, dx$ δ) 1
9.	Αν F είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε: α) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta)$ β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\alpha)F(\beta)$ γ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\alpha) + F(\beta)$ δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$
10.	Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \in \Delta$, τότε: α) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\beta^\gamma f(x)dx$ β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq \int_\alpha^\beta f(t)dt$ γ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f(t)dt$ δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\alpha f(t)dt = 0$
11.	Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma, \in \Delta$, τότε: α) $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\gamma^\alpha f(t)dt$ β) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(u)du$ γ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(t)dt$ δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_{-\beta}^{-\alpha} f(x)dx$

12.	Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε: α) $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)\circ g(x))dx=\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right)\left(\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx\right)$ β) $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ γ) $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx=-\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ δ) $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$
13.	Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, από τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\beta$ και από τον άξονα $x'x$, δίνεται από τον τύπο $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ α) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$. β) Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$. γ) Για κάθε (συνεχή) συνάρτηση f. δ) Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.
14.	Ο όγκος V_f του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της τεθλασμένης γραμμής OAB (σχ. 7.8ε) γύρω από τον άξονα $x'x$ είναι ίσος με: α) $V=\pi\int_{0}^{1}x^2dx+\pi\int_{1}^{2}x^2dx$ β) $V=\pi\int_{0}^{1}x^2dx+\pi$ γ) $V=\pi\int_{0}^{2}(x+x^2)dx$ δ) $V=\pi+\pi\int_{1}^{2}x^2dx$  Σχ. 7.8ε
15.	Ο όγκος V_f του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος AB γύρω από τον άξονα $x'x$ (σχ. 7.8στ) είναι ίσος με: α) $V_f=\int_{2}^{6}xdx$ β) $V_f=\frac{\pi}{2}\int_{2}^{4}x^2dx$ γ) $V_f=2\pi\int_{2}^{4}xdx$ δ) $V_f=\int_{2}^{6}x^2dx$  Σχ. 7.8στ

7.9 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές.

7.9.1. Δίνονται τα ολοκληρώματα $F(x)=\int_{0}^{x}e^t\text{συν}^2t\,dt$ και $G(x)=\int_{0}^{x}e^t\text{ημ}^2t\,dt$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $F(x)+G(x)=e^x-1$, $F(x)-G(x)=\frac{1}{5}[e^x(\text{συν}2x+\text{ημ}2x)-1]$.

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$.

γ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_{\pi/2}^{\pi}e^t\text{συν}^2t\,dt, \int_{\pi/3}^{\pi/2}e^t\text{ημ}^2t\,dt$.

7.9.2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{(u+1)(u+3)}du$. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε, για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x+2)}\,dx$ β) $\int \frac{xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)(e^{x^2}+2)}\,dx$ γ) $\int \frac{x}{(x^2+2)(x^2+4)}\,dx$

7.9.3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-10x^2+2$ και $g(x)=3x^2-12x+2$.

α) Να διαπιστώσετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς -4 ,0, 1 και 3.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

7.9.4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2-x-2$.

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx$.

β) Να βρείτε την τιμή του α, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx$ να λάβει την ελάχιστη τιμή.

7.9.5. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=\frac{x}{x+1}$ και $g(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, έτσι ώστε η f να λάβει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x+1}.$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\varkappa$, λ, μ, έτσι ώστε η g να λάβει τη μορφή:

$$g(x)=\varkappa x+\lambda+\frac{\mu}{x+1}.$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 g(x)dx$.

7.9.6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, $g(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, έτσι ώστε η f να λάβει τη μορφή:

$$f(x)=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}.$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^4 f(x)dx$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\varkappa$, λ, μ, έτσι ώστε η g να λάβει τη μορφή:

$$g(x)=\frac{\varkappa}{x-2}+\frac{\lambda}{x-3}.$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_4^5 g(x)dx$.

7.9.7. Η θερμοκρασία ενός σώματος ελαττώνεται με ρυθμό $6te^{-3t^2}$, όπου t ο χρόνος που πέρασε από την αρχή του πειράματος. Αν η αρχική θερμοκρασία του σώματος είναι $T_0=37^{\circ}$C, να βρείτε τον τύπο ο οποίος δίνει τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

7.9.8. Η είσπραξη $E(x)$, $0\le x\le 1000$ από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x)=500-\frac{x}{2}$, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι σταθερός και ισούται με 10. Να βρείτε το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 200 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα. Να βρείτε επίσης για ποιον αριθμό προϊόντων η βιομηχανία έχει το μέγιστο κέρδος.

7.9.9. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η επιτάχυνσή του σε m/min^2 τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $a(t)=e^t+2t-1$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 3 m από την αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα 1 m/min.

α) Να βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t.

β) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τη συνάρτηση θέσης του κινητού τη χρονική στιγμή t.

γ) Να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t=2$ min.

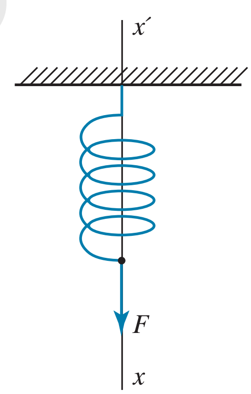
7.9.10. Σε ένα πλοίο υπάρχει ένα αυτόματο μηχάνημα πώλησης αναψυκτικού, στο οποίο έχει παρατηρηθεί ότι ο ρυθμός κατανάλωσης (λόγω πώλησης ποτηριών αναψυκτικού στους επιβάτες του πλοίου) δίνεται από τον τύπο $A'(t)=-0{,}09\sqrt{t}$ μονάδες όγκου ανά ώρα. Αν στο πλοίο είχε γίνει κατά τον απόπλου προμήθεια 480 μονάδων όγκου αναψυκτικού, να υπολογίσετε την ποσότητα αναψυκτικού που απομένει προς διάθεση στους επιβάτες του πλοίου ως συνάρτηση του χρόνου. Στη συνέχεια να βρείτε σε πόσο χρόνο θα εξαντληθούν τα αποθέματα αναψυκτικού.

7.9.11. Υποθέτουμε ότι ένα σώμα κινείται πάνω σε έναν άξονα $x'x$ υπό την επίδραση μιας δύναμης με διεύθυνση τη διεύθυνση του $x'x$ και μέτρο που εξαρτάται μόνο από τη θέση x του σώματος, δηλαδή το μέτρο της περιγράφεται από μία συνεχή συνάρτηση $F(x)$ (σχ. 7.9α). Αποδεικνύεται ότι το έργο της δύναμης κατά τη μετακίνηση του σώματος από το σημείο $x=a$ στο σημείο $x=\beta$ (το οποίο ονομάζεται σύντομα «έργο της δύναμης στο διάστημα $[\alpha, \beta]$») δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$W_f=\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx.$$

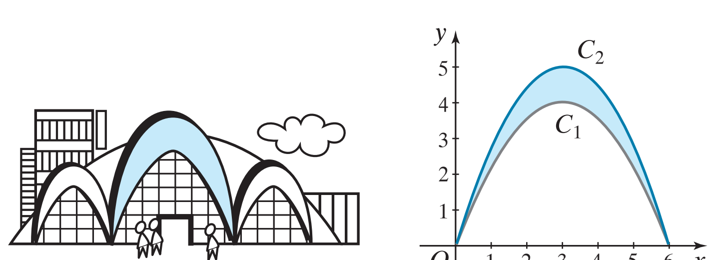
α) Η δύναμη που απαιτείται για την επιμήκυνση ενός ελατηρίου κατά x cm δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο του Hook, από τον τύπο $F(x)=\varkappa x$, όπου $\varkappa$ είναι μια θετική σταθερά. Αν μια δύναμη μέτρου 2 Newton προκαλεί επιμήκυνση 1 cm στο ελατήριο, να υπολογίσετε το έργο που καταναλώνεται για επιμήκυνση του ελατηρίου κατά 5 cm.

β) Δύο ηλεκτρόνια που βρίσκονται σε απόσταση x cm μεταξύ τους απωθούνται με μια δύναμη μέτρου $F(x)=\varkappa/x^2$, όπου $\varkappa$ είναι μια θετική σταθερά. Υποθέτουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο σε κάποιο σημείο, ενώ ένα δεύτερο κινείται προς αυτό κατά τη διεύθυνση της ευθείας που τα ενώνει. Να βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη, όταν το δεύτερο ηλεκτρόνιο ξεκινάει από απόσταση 3 cm από το πρώτο και κινείται μέχρι να φτάσει σε απόσταση 1 cm.



Σχ. 7.9α

7.9.12. Στην είσοδο ενός κτηρίου υπάρχουν τρεις αψίδες, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.5ζ. Η κεντρική αψίδα περιγράφεται από τις παραβολές με εξισώσεις $C_1: y=-4x^2+24x$



Σχ. 7.5ζ

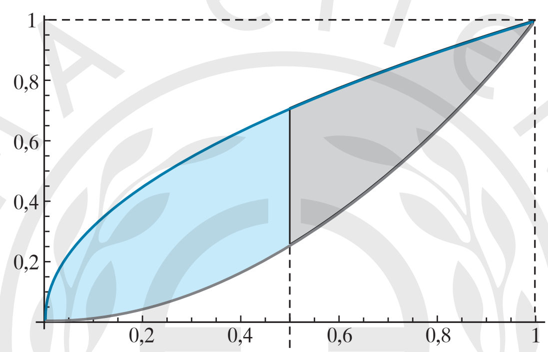
και $C_2 : y = -5x^2 + 30x$. Αν το κόστος επένδυσης με ένα συγκεκριμένο υλικό είναι 20 €/m^2, να υπολογίσετε το συνολικό κόστος για την επένδυση της αψίδας.

7.9.13. Μια αντλία νερού που χρησιμοποιείται σε ένα πλοίο για την απομάκρυνση υδάτων σε έναν χώρο, έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο:

$$f'(t) = 0{,}1 + 0{,}3t - \frac{t^2}{60},$$

όπου $f(t)$ είναι τα κυβικά μέτρα νερού που αντλούνται μετά από τις t ώρες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα κυβικά μέτρα νερού αντλούνται με την αντλία ανάμεσα στην 2η και 3η ώρα λειτουργίας της (για τη συνάρτηση f προφανώς θεωρούμε ότι ισχύει $f(0) = 0$).

7.9.14. Το σχήμα 7.5η δείχνει την κάτοψη ενός κανό που χρησιμοποιείται σε θαλάσσιους αγώνες ταχύτητας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των δύο γραμμοσκιασμένων χωρίων του σχήματος, καθώς και το συνολικό εμβαδόν της κάτοψης.

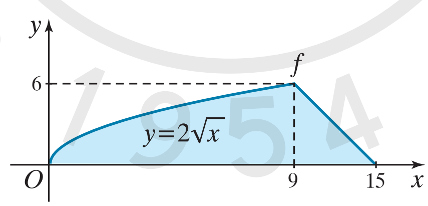


Σχ. 7.5η

7.9.15. Το πτερύγιο σταθεροποίησης ενός πλοίου έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 7.5ι.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f, η οποία περιγράφει το σχήμα του πτερυγίου.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πλάγιας επιφάνειας του πτερυγίου.



Σχ. 7.5ι

Κεφάλαιο Όγδοο
Διαφορικές εξισώσεις

8.7 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Συνήθης διαφορική εξίσωση n–τάξης.	Μία εξίσωση που περιέχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή x, μία συνάρτηση $y=y(x)$ και έναν πεπερασμένο αριθμό παραγώγων της y ως προς x, δηλαδή: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0, \quad n \geq 1.$
Τάξη μιας διαφορικής εξισώσης.	Είναι η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σ' αυτήν.
Μερική λύση διαφορικής εξίσωσης.	Κάθε λύση της, η οποία προκύπτει από τη γενική λύση, όταν στις αυθαίρετες σταθερές που περιλαμβάνει δοθούν συγκεκριμένες τιμές.
Διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών πρώτης τάξης.	$P(x) \cdot M(y) \frac{dy}{dx} + Q(x) \cdot N(y) = 0$
Ομογενής συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$, βαθμού m.	$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ για κάθε $\lambda \neq 0$
Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.	$y'(x) + p(x)y = f(x)$, όπου $p(x), f(x)$ δεδομένες συνεχείς συναρτήσεις.
Ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.	$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$, όπου $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού και συνεχείς ως προς τις μεταβλητές x και y.
Ολοκληρωτικός παράγοντας ή πολλαπλασιαστής του Euler για τη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης $y'(x) + p(x)y = f(x)$.	$Q(x) = e^{\int p(x) dx}$
Λύση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $y'(x) + p(x)y = f(x)$.	$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c\right], \quad c \in \mathrm{R}$
Διαφορική εξίσωση Bernoulli.	$y'(x) + p(x)y = f(x)y^m, \quad m \neq 0,1$ όπου $p(x), f(x)$ συνεχείς συναρτήσεις
Γραμμική διαφορική εξίσωση n–τάξης.	$\alpha_n y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_1 y'(x) + \alpha_0 y(x) = f(x)$

Χαρακτηριστική εξίσωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n–τάξης.	$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$
Χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$.	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.	$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$, ($p, q$ σταθερές)
Γενική λύση $y_{ομ}$ της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$ όπου p, q σταθερές.	α) $y_{ομ} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_1 e^{\lambda_2 x}$ αν $\Delta > 0$ β) $y_{ομ} = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda x}$ αν $\Delta = 0$ γ) $y_{ομ} = e^{ax}(c_1\, συνβx + c_2\, ημβx)$ αν $\Delta < 0$ ($\Delta = p^2 - 4q$ η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)
Γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x)$.	$y = y_0 + y_\mu$ όπου y_0 η γενική λύση της ομογενούς $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$ και y_μ μία μερική λύση της μη ομογενούς $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x)$
Μερική λύση της $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = P_n(x)$ όπου $P_n(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς x.	α) $y_\mu = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, αν $q \neq 0$ β) $y_\mu = x\,(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$, αν $q = 0$
Μερική λύση της $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = ke^{\lambda x}$.	$y_\mu = Ae^{\lambda x}$
Μερική λύση της $y''(x) + py'(x) + qy(x) = k_1 ημωx + k_2 συνωx$.	$y_\mu = A\, ημω\, x + B\, συνω\, x$

8.8 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός, ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Η $y'' + 3xy' + 4y = x^2$ είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.	**Σ Λ**
2.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx} = x^2$ είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.	**Σ Λ**
3.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx} = x^2$ είναι μία μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.	**Σ Λ**
4.	Η $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0,\ w = w(x, y)$ είναι μία μερική διαφορική εξίσωση.	**Σ Λ**

5.	Η συνάρτηση $y(x)=2e^{-x}+x\,e^{-x}$ είναι λύση της $y'' + 2y' + y = 0$.	**Σ Λ**
6.	Η συνάρτηση $y(x)=1$ είναι λύση της $y'' + 2y' + y = x$.	**Σ Λ**
7.	Η y = ημ$2x$ είναι η γενική λύση της $y'' + 4y = 0$.	**Σ Λ**
8.	Η y = ημ$2x$ είναι μία μερική λύση της $y'' + 4y = 0$.	**Σ Λ**
9.	Η y = ημ$2x + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι γενική λύση της $y'' + 4y = 0$.	**Σ Λ**
10.	Η $y(x)=2e^{3-x}$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' + y = 0$, $y(3)=2$.	**Σ Λ**
11.	Μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης έχει τη μορφή $F(x,y,y')=0$.	**Σ Λ**
12.	Οι λύσεις μιας διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξης δίνονται από την $y = \Phi(x, c)$, $c \in \mathbb{R}$.	**Σ Λ**
13.	Η λύση μιας διαφορικής είσωσης πρώτης τάξης μπορεί να δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την $F(x,y,c)=0$.	**Σ Λ**
14.	Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης μπορεί να δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την $F(x,y,c_1,c_2)=0$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.	**Σ Λ**
15.	Η εξίσωση $e^x dx - y\,dy=0$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.	**Σ Λ**
16.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+2y^4}{x\,y^3}$ είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.	**Σ Λ**
17.	Η συνάρτηση $f(x,y)=x^4 + 2y^4$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού 4.	**Σ Λ**
18.	Η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{x^4+2y^4}{xy^3}$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού 4.	**Σ Λ**
19.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση.	**Σ Λ**
20.	Η εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ επιλύεται με τη βοήθεια της αντικατάστασης $z=\dfrac{x}{y}$.	**Σ Λ**
21.	Η εξίσωση $y' + 3y = x$ είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.	**Σ Λ**
22.	Η εξίσωση $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4 y^{1/3}$ είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.	**Σ Λ**
23.	Η συνάρτηση $y(x)=c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ είναι λύση της $y'' - y' - 2y = 0$.	**Σ Λ**
24.	Η γενική λύση της $y'' - py' + qy=0$ με $p^2 - 4q < 0$ δίνεται από τον τύπο $y = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$.	**Σ Λ**

25.	Η γενική λύση της $y'' + py' + qy=0$ με $p^2-4q<0$ δίνεται από τον τύπο $y=e^{ax}(c_1\,\text{συν}\beta x + c_2\,\text{ημ}\beta x)$.	**Σ Λ**
26.	Η γενική λύση της $y'' + py' + qy = 0$ με $p^2-4q = 0$ δίνεται από τον τύπο $y = c_1e^{\lambda x} + c_2e^{\lambda x}$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ έχει μερική λύση την: α) $y=x+1$ β) $y=-\dfrac{1}{x}$ γ) $y=x$ δ) $y=x^2$
2.	Η διαφορική εξίσωση $\dfrac{dy}{dx}=2x\sqrt{y-1}$ έχει γενική λύση την: α) $(x+c)^2$ β) $1+\dfrac{(x^2+c)^2}{4}$ γ) $y=-\dfrac{1}{x}+c$ δ) $y=-\dfrac{c}{x^2}$
3.	Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=x^4,\ x>0$ δίνεται από: α) $1+\dfrac{(x^5+c)^2}{4}$ β) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{(x^5+c)^2}{4}$ γ) $\dfrac{x^5}{3}+cx^2$ δ) $\dfrac{x^5}{3}+cx^2+2x$
4.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(1+x^2)y'+2xy=1, y(0)=1$ δίνεται από τον τύπο: α) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}+c$ β) $y=x+3$ γ) $y=-\dfrac{4}{x^2}$ δ) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$
5.	Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bernoulli $y'+\dfrac{3}{x}y=x^2y^2,\ x>0$ είναι η: α) $y=x^3\ln x+c$ β) $y=\dfrac{1}{x^3}(c-\ln x)^{-1}$ γ) $y=\dfrac{1}{x^5}(c-2\ln x)^{-1}$ δ) $y=\dfrac{2}{x^3}(c-2\ln x)^{-1}$
6.	Η συνάρτηση $f(x,y)=x^3+xy^2e^{x/y}$ είναι μία ομογενής συνάρτηση βαθμού: α) 3 β) 2 γ) 1 δ) 4
7.	Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ είναι η: α) $y=x^2\ln x+2cx^3$ β) $y=\dfrac{1}{x^2}\ln x+c$ γ) $y^2=x^2\ln x+2cx^3$ δ) $y^2=2x^2\ln x-2cx^2$
8.	Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}, y(1)=-2$ δίνεται από τον τύπο: α) $y=-\sqrt{2x^2\ln x+4x^2}$ β) $y=+\sqrt{2x^2\ln x+4x^2}$ γ) $y^2+x=\sqrt{3x^2\ln x+4x^2}$ δ) $y^2+x=x^2+\sqrt{x^2\ln x+3x^2}$

9.	Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'=\dfrac{x+1}{y^4+1}$ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η: α) $y-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^5}{5}-x=c$ β) $y^3-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^8}{8}-x=c$ γ) $\ln(xy)-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^5}{5}-x=c$ δ) $e^{x+y}-\ln(x-y)=c$
10.	Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'=-\dfrac{y^2}{x},\ x>0$ που διέρχεται από το σημείο $(1,\dfrac{1}{3})$ είναι η: α) $y=x+3$ β) $y=(x+3)^{-2}$ γ) $y=(3+\ln x)^{-1}$ δ) $y=x+(3-\ln x)^{-1}$
11.	Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''-6y'+25y=0$ δίνεται από: α) $y=c_1e^{3x}\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x$ β) $y=e^{3x}(c_1\text{συν}4x+c_2\,\text{ημ}3x)$ γ) $y=c_1xe^{3x}\text{συν}4x+c_2xe^{3x}\text{ημ}4x$ δ) $y=e^{3x}\text{συν}4x+2c_2e^{3x}\text{ημ}4x$
12.	Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y''-6y'+25y=64e^{-x}$. Η λύση της σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών είναι η: α) $y=c_1e^{3x}\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x+4e^{x}$ β) $y=c_1e^{3x}\text{συν}5x+c_2e^{3x}\text{ημ}5x+4e^{x}$ γ) $y=e^{2x}(c_1\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x)+2e^{-x}$ δ) $y=e^{3x}(c_1\text{συν}4x+c_2e^{3x}\text{ημ}4x)+2e^{-x}$
13.	Μία μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''=9x^2+2x-1$ είναι η: α) $y_\mu=-\dfrac{2}{x}+1$ β) $y_\mu=-\dfrac{2}{x}+1$ γ) $y_\mu=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^4}{4}$ δ) $y_\mu=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^4}{4}+cx,\ c\in\mathbb{R}$
14.	Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''-y'-2y=4x^2$ είναι η: α) $y=y_0+y_\mu=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-2x^2+3x-3$ β) $y=y_0+y_\mu=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-2x^2+2x-3$ γ) $y=y_0+y_\mu=c_1e^{-x}-2x^2+2x-3$ δ) $y=y_0+y_\mu=c_2e^{2x}-2x^2+2x-3$
15.	Δίνεται η διαφορική εξίσωση Bernoulli $y'+\dfrac{6}{t}y=3y^{4/3},\ t>0$. Η γενική της λύση είναι η: α) $y=t^2+c$ β) $y=\dfrac{1}{(ct^2+t)^3}$, με $ct^2+t\neq 0,\ t>0$ γ) $y=(t^2+c)^{-1},\ t^2+c\neq 0$ δ) $y=\dfrac{t^2}{(ct^2+t)^3}$, με $ct^2+t\neq 0,\ t>0$

8.9 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές

8.9.1. Να προσδιορίσετε την άγνωστη συνάρτηση, την ανεξάρτητη μεταβλητή και την τάξη των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

α) $y'' - 3yy' + xy = 0$ β) $y^{(6)} + 4y^2 y''' + 5y^8 = x$

γ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^n = y^3 + 2$ δ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{3/2} = 1 + x - y$

8.9.2. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $\frac{dy}{dx} = -2x\,y$ β) $y' = y\eta\mu x$ γ) $2\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

8.9.3. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $\frac{dy}{dx} = (64\,xy)^{\frac{1}{3}}$ β) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3 - y)}$

8.9.4. Να βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'' + 4y = 0$, που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

8.9.5. Να επιλύσετε τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $y' - 2x\,y = 0, \quad y(0) = -1$ β) $y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad y(0) = 2$

γ) $y' + y = 2, \quad y(0) = 0$ δ) $y' + y = e^x, \quad y(0) = 1$

ε) $x\,y' + 2\,y = 4x^2, \quad y(1) = 4$ στ) $y' - 2\,y = x, \quad y(0) = \frac{3}{4}$

8.9.6. Να λύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' + 3\,y = 2x\,e^{-3x}$ β) $x\,y' + (x-2)\,y = 3x^3\,e^{-x}$ γ) $x(x+1)\,y' - y = 2x^2\,(x+1)$

δ) $y' + \frac{2x-3}{x}y = 4x^3$ ε) $y' - 5\,y = e^x$

8.9.7. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $\frac{dy}{dx} = y\,e^x, \quad y(0) = 2e$ β) $y\,y' = \eta\mu x, \quad y(0) = 2$

γ) $y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 1$ δ) $(y + e^{-y})\,y' = 1, \quad y(1) = 1$

8.9.8. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' + y = xy^3$ β) $y' + y = y^{-1}$

8.9.9. Να επιλύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

α) $\frac{dy}{dx} = y\,e^x, \quad y(0) = 2e$ β) $y\,y' = \eta\mu x, \quad y(0) = 2$

8.9.10. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρείτε τον βαθμό τους.

α) $f(x,y)=\dfrac{y-x}{x}$ β) $g(x,y)=\dfrac{x^2+2y^2}{xy}$

γ) $h(x,y)=\dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ δ) $k(x,y)=\dfrac{x^4+3x^2y^2+y^4}{x^3y}$

8.9.11. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς και σε περίπτωση θετικής απάντησης να τις επιλύσετε.

α) $y'=\dfrac{x+2y}{x}$ β) $y'=\dfrac{y-x}{x}$

γ) $y'=\dfrac{y^2+2x}{xy}$ δ) $y'(y^2-x^2)=2xy$

8.9.12. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'+\frac{1}{x}\,y=\frac{\text{συν}x}{x}.$$

α) Να βρείτε τη γενική της λύση $y=y(x)$.

β) Να μελετήσετε τη συμπεριφορά της λύσης όταν $x\to 0$, δηλαδή να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}y(x)$.

8.9.13. Να επιλύσετε τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις.

α) $y''+6y'+9y=0$ β) $y''-20y'+64y=0$ γ) $y''+y'+2y=0$

δ) $y''+y'+\dfrac{1}{4}y=0$ ε) $\dfrac{d^2y}{dy^2}-5\dfrac{dy}{dy}+7y=0$ στ) $\dfrac{d^2y}{dy^2}-18\dfrac{dy}{dy}+81y=0$

8.9.14. Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2I}{dt^2}-4I=t^2e^{-t}.$$

8.9.15. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών $y''-y-2y=0$, $y(0)=a$, $y'(0)=2$.

α) Να βρείτε τη λύση του προβλήματος.

β) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς a, ώστε η λύση $y=y(t)$ να τείνει στο μηδέν όταν $t\to+\infty$, δηλαδή να ισχύει $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

8.9.16. Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

8.9.17. Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α) $y''-2y'+y=x^2-1$ β) $y''-2y'+y=3e^{2x}$ γ) $y''-2y'+y=4\text{συν}x$

δ) $y''-2y'+y=xe^x$ ε) $y''-2y'+y=3e^x$ στ) $\dfrac{y'-y}{y''}=3$

8.9.18. Ένα σώμα με άγνωστη θερμοκρασία μπαίνει σε ψυγείο, το οποίο έχει σταθερή θερμοκρασία $0^\circ F$. Μετά την παρέλευση 20 min η θερμοκρασία του σώματος είναι $40^\circ F$ και μετά από 40 min είναι $20^\circ F$. Να βρείτε την αρχική θερμοκρασία του σώματος.

8.9.19. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας T μιας μεταλλικής ράβδου είναι η

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0, \quad T = T(t),$$

όπου k μία σταθερά. Υποθέτουμε ότι η μεταλλική ράβδος θερμοκρασίας $100^o F$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ τοποθετείται σε περιβάλλον με θερμοκρασία 0^o F. Αν μετά από 20 min η θερμοκρασία της ράβδου έχει γίνει 50^o F, να βρείτε:

α) Τον χρόνο που χρειάζεται για να πέσει η θερμοκρασία της ράβδου στους 20^o F.

β) Τη θερμοκρασία της ράβδου μετά από 10 min.

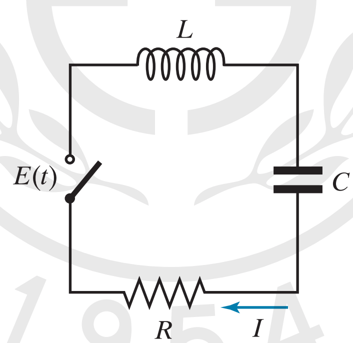
8.9.20. Σε ένα κύκλωμα RC έχουμε ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής 300συν2t(σε Volt), μία αντίσταση 150 Ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 1/600 Farad. Αν ο πυκνωτής έχει αρχικό φορτίο 5 Coulomb:

α) Να βρείτε το φορτίο $q = q(t)$ του πυκνωτή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

β) Να βρείτε το ρεύμα του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t = \pi/2$.

8.9.21. Έστω κύκλωμα RL με ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής 4ημt (σε Volt), μία αντίσταση 100 Ohm και ένα πηνίο L=4 Henry. Αν το κύκλωμα έχει μηδενικό αρχικό ρεύμα, να υπολογίσετε το ρεύμα I=$I(t)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

8.9.22. Έστω κύκλωμα RCL (σχ. 8.9), το οποίο αποτελείται από ηλεκτρεγερτική δύναμη της μορφής 200 συν (100t) Volt, μία αντίσταση 5 Ohm, ένα πηνίο L = 0,05 Henry και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 0,0004 Farad, όλα συνδεδεμένα σε σειρά. Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό ρεύμα είναι μηδέν και ο πυκνωτής δεν έχει αρχική φόρτιση, να υπολογίσετε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.



Σχ. 8.9

Κεφάλαιο Ένατο
Στατιστική

9.8 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας.

Απόλυτη συχνότητα ή απλά συχνότητα ν_i της τιμής t_i.	Ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή t_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ($i = 1, 2,..., \varkappa$).
Σχετική συχνότητα f_i της τιμής t_i.	$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2,..., \varkappa$
Ιδιότητες της σχετικής συχνότητας.	α) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$ β) $f_1 + f_2 + ... + f_\varkappa = 1$
Αθροιστικές συχνότητες N_i.	$N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$
Αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i.	$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$ για $i = 1, 2,..., \varkappa$
Τρόποι γραφικής απεικόνισης κατηγορικών δεδομένων.	Με ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα.
Τρόποι γραφικής απεικόνισης ποσοτικών δεδομένων.	Με διαγράμματα συχνοτήτων (ιστογράμματα, όταν έχει γίνει ομαδοποίηση των δεδομένων), κυκλικά διαγράμματα και φυλλογραφήματα.
Εμπειρικός τύπος του Sturges.	$\varkappa = 1 + 3{,}32 \log \nu = 1 + 1{,}44 \ln \nu$, όπου ν είναι το μέγεθος του δείγματος.
Μέτρα θέσης.	α) Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή. β) Διάμεσος. γ) Κορυφή ή επικρατούσα τιμή.
Αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή ($\bar{x}$)	$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\varkappa} t_i \nu_i$
Διάμεσος (δ).	Η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων δεδομένων σε δύο ισοπληθή υποσύνολα έτσι, ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες από αυτήν και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από αυτήν.
Εκατοστημόρια p_a, $a = 1, 2,..., 99$.	Η τιμή εκείνη, για την οποία το πολύ a% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του p_a και το πολύ $(100-a)$% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.
Τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3.	Τα εκατοστημόρια p_{25}, p_{50}, p_{75}.
Υπολογισμός διαμέσου για ομαδοποιημένα δεδομένα.	$\delta = L_i + \frac{0{,}5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} c = L_i + \frac{0{,}5 - F_{i-1}}{f_i} c$
Επικρατούσα τιμή ή κορυφή (M_0).	Η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Υπολογισμός της κορυφής για ομαδοποιημένα δεδομένα.	$$M_0 = L_i + \frac{D}{D+E}c$$ όπου $D = f_i - f_{i-1}$ και $E = f_i - f_{i+1}$.
Μέτρα διακύμανσης.	α) Εύρος ή κύμανση. β) Ενδοτεταρτημοριακό εύρος. γ) Διασπορά.
Εύρος ή κύμανση (R).	Η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.
Διασπορά s^2.	$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(t_i - \overline{x})^2 \nu_i$$ ή ισοδύναμα $$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2\right\} = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} t_i^2 \nu_i - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} t_i \nu_i\right)^2\right\}.$$
Τυπική απόκλιση.	$$s = \sqrt{s^2}$$
Εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων.	$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2},$$ $$\hat{\alpha} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i - \hat{\beta}\cdot\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$$
Ευθεία ελάχιστων τετραγώνων ή ευθεία παλινδρόμησης της Y (πάνω) στη X.	$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$$
Συντελεστής προσδιορισμού.	$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \overline{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - \overline{y})^2}$$ όπου $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x_i$, $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ για $i = 1,2,\ldots,\nu$.
Συντελεστής συσχέτισης	$$r = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)}\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}}$$

9.9 Ερωτήσεις κατανόησης.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων.	**Σ Λ**
2.	Αν συμβολίσουμε με θ_i το τόξο του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή t_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, τότε $\theta_i = 360^{\circ}\, \nu_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.	**Σ Λ**
3.	Ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας είναι μια ποσοτική συνεχής μεταβλητή.	**Σ Λ**
4.	Η τιμή της αμόλυβδης βενζίνης σε ένα πρατήριο είναι συνεχής ή μεταβλητή.	**Σ Λ**
5.	Η μέση τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ποιοτικά, όσο και για ποσοτικά δεδομένα.	**Σ Λ**
6.	Ένα φυλλογράφημα δεν περιέχει όλα τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, αφού κατά τη δημιουργία του χάνονται ορισμένες πληροφορίες που αφορούν στα δεδομένα.	**Σ Λ**
7.	Η διάμεσος των παρατηρήσεων 1 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με τη διάμεσο των 1 888 88 2 4 6 88.	**Σ Λ**
8.	Η διασπορά των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δίνεται από τον τύπο: $s^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2$.	**Σ Λ**
9.	Η διασπορά s^2 εκφράζεται στις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις που μελετάμε.	**Σ Λ**
10.	Όταν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή αντί της διαμέσου.	**Σ Λ**
11.	Όταν προσθέσουμε τον αριθμό 5 σε όλες τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής, τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξάνουν κατά 5.	**Σ Λ**
12.	Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί 4, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί 2.	**Σ Λ**
13.	Στην ευθεία ελάχιστων τετραγώνων $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$ η εκτιμήτρια του α εκφράζει την αναμενόμενη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής Y, όταν το X μεταβληθεί κατά μία μονάδα.	**Σ Λ**
14.	Τα τεταρτημόρια είναι μέτρα θέσης, ενώ η διαφορά τους είναι μέτρο διακύμανσης.	**Σ Λ**
15.	Ο αριθμητικός μέσος μπορεί να λάβει τιμή μικρότερη από την ελάχιστη τιμή των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του.	**Σ Λ**
16.	Ένας προσεγγιστικός υπολογισμός των τεταρτημορίων Q_1 και Q_3 μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.	**Σ Λ**
17.	Η επικρατούσα τιμή ή κορυφή M_0 ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντοτε μοναδική.	**Σ Λ**

18.	Ο συντελεστής συσχέτισης μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τη μονάδα μέτρησης της μίας ή και των δύο μεταβλητών που χρησιμοποιούνται.	**Σ Λ**
19.	Ένας συντελεστής συσχέτισης $r = +0{,}5$ δείχνει μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών παρά ο $r = -0{,}8$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής t_i δίνεται από τον τύπο: α) $f_i = \nu \cdot \nu_i$ β) $f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$ γ) $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ δ) $f_i = \dfrac{1}{\nu_i}$
2.	Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει: α) $f_1 + ... + f_\varkappa = 1$ β) $f_1 + ... + f_\varkappa = 0$ γ) $-1 \le f_i \le 1$ δ) $1 \le f_i \le 2$.
3.	Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό τους μέσο είναι: α) Ίσο με το μηδέν. β) Πάντοτε αρνητικό. γ) Πάντοτε θετικό. δ) Ορισμένες φορές θετικό και ορισμένες αρνητικό
4.	Η κορυφή των παρατηρήσεων 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με: α) $M_0 = 8$ β) $M_0 = 2$ γ) $M_0 = 4$ δ) $M_0 = 6$
5.	Η διάμεσος των παρατηρήσεων 8 8 2 4 6 8 είναι ίση με: α) $\delta = 3$ β) $\delta = 7$ γ) $\delta = 2$ δ) $\delta = 4$
6.	Ποιο από τα επόμενα είναι μέτρο θέσης; α) Η διάμεσος β) Η διασπορά γ) Το εύρος δ) Κανένα
7.	Ποιο από τα επόμενα είναι μέτρο διακύμανσης; α) Η τυπική απόκλιση β) Η μέση τιμή γ) Η κορυφή δ) Η διάμεσος
8.	Η διάμεσος είναι πάντοτε ίση με: α) Το δεύτερο τεταρτημόριο. β) Το πρώτο τεταρτημόριο. γ) Το τρίτο τεταρτημόριο. δ) Την κορυφή.
9.	Η σχετική συχνότητα μπορεί να λάβει: α) Τιμές μεταξύ του 0 και του 1 μόνο. β) Κάθε πραγματική τιμή. γ) Τιμές μεγαλύτερες από 1. δ) Αρνητικές τιμές.
10.	Ένα μέτρο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ποιοτικά, όσο και για ποσοτικά δεδομένα είναι: α) Η επικρατούσα τιμή. β) Τυπική απόκλιση. γ) Η διασπορά. δ) Η διάμεσος.

11.	Το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού είναι: α) Μια διακριτή ποσοτική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. β) Μια συνεχής ποσοτική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. γ) Μια κατηγορική μεταβλητή με τιμές 1, 2,..., 6. δ) Μια διακριτή ποσοτική μεταβλητή με τιμές 0, 1,..., 6.
12.	Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές ενός συνόλου δεδομένων μιας ποσοτικής μεταβλητής με μία σταθερή ποσότητα, τότε ο αριθμητικός τους μέσος: α) Πολλαπλασιάζεται με την ποσότητα αυτή. β) Διαιρείται με την ποσότητα αυτή. γ) Δεν μεταβάλλεται. δ) Μεγαλώνει όσο ακριβώς είναι η τιμή της ποσότητας αυτής.
13.	Ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει τιμές: α) Μεταξύ του 0 και του 1, δηλαδή ισχύει $0 \leq R^2 \leq 1$. β) Μεγαλύτερες από 1, δηλαδή ισχύει $R^2 > 1$. γ) Μεταξύ του –1 και του 0, δηλαδή ισχύει $-1 \leq R^2 \leq 0$. δ) Μόνο αρνητικές, δηλαδή ισχύει $R^2 \leq 0$.

9.9 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές.

9.9.1. Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ενός συνόλου δεδομένων ορίζεται από τον λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}},$$

εκφράζεται συνήθως επί τοις εκατό και αποτελεί ένα μέτρο σχετικής διακύμανσης των τιμών που μελετάμε. Όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι μικρότερος ή ίσος με 10%, δεχόμαστε ότι το σύνολο τιμών είναι ομοιογενές. Να εξετάσετε τα επόμενα σύνολα τιμών ως προς την ομοιογένεια και να τα συγκρίνετε μεταξύ τους με βάση τη διασπορά τους τη σχετική διασπορά τους.

α) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
β) 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109.
γ) 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190.

9.9.2. Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι τιμές που συγκεντρώθηκαν για μια θετική ποσοτική μεταβλητή (χαρακτηριστικό) X, τότε ο γεωμετρικός μέσος g_x των παρατηρήσεων ορίζεται ως η ν-οστή ρίζα του γινομένου των τιμών των διαθέσιμων παρατηρήσεων, δηλαδή $g_x = \sqrt[\nu]{x_1 x_2 \cdots x_\nu}$.
Ο γεωμετρικός μέσος χρησιμοποιείται στην εκτίμηση της μέσης ετήσιας μεταβολής (αύξησης ή μείωσης) του όγκου ή της αξίας της παραγωγής προϊόντων, στον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής ενός πληθυσμού, στην κατάρτιση αριθμοδεικτών (δεικτών τιμών ή ποσοτήτων αγαθών) κ.λπ.

α) Να αποδείξετε ότι ο λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου είναι ίσος με τον αριθμητικό μέσο των λογαρίθμων των τιμών των διαθέσιμων παρατηρήσεων.
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των παρατηρήσεων 1, 3, 5, 10, 15.

γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που βρέθηκε στο ερώτημα (α), να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των παρατηρήσεων 2, 2^2, 2^3, 2^4.

9.9.3. Έστω n σύνολα δεδομένων με ίσο αριθμό παρατηρήσεων σε κάθε σύνολο. Ας συμβολίσουμε με $\overline{x}_1$ και s_1^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά αντίστοιχα του πρώτου συνόλου δεδομένων, με $\overline{x}_2$ και s_2^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά του δεύτερου συνόλου δεδομένων κ.ο.κ. και με $\overline{x}_n$ και s_n^2 τον αριθμητικό μέσο και τη διασπορά του n-οστού συνόλου δεδομένων.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος όλων των μετρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i .$$

β) Να αποδείξετε ότι η διασπορά s^2 όλων των μετρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_n^2 .$$

γ) Ισχύει αντίστοιχος τύπος για την τυπική απόκλιση;

9.9.4. Προκειμένου να διαπιστωθεί η επίδραση της θερμοκρασίας X στην αντοχή Y ενός υλικού, θέλουμε να δημιουργήσουμε με τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων μια ευθεία της μορφής $y = a + \beta x$.

α) Αν χρησιμοποιούμε $\nu = 5$ μετρήσεις της αντοχής του υλικού y_1, y_2, y_3, y_4 και y_5 στις θερμοκρασίες x_1=–2, x_2=–1, x_3=0, x_4=1 και x_5=2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων των α και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{10}(-2y_1 - y_2 + y_4 + 2y_5).$$

β) Αν χρησιμοποιούμε $\nu = 6$ μετρήσεις της αντοχής του υλικού y_1, y_2, y_3, y_4 και y_5 στις θερμοκρασίες x_1=–2, x_2=–2, x_3=0, x_4=0, x_5=1 και x_6=1, και αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι οι εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων των α και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{84}(9y_1 + 9y_2 + 15y_3 + 15y_4 + 18y_5 + 18y_6), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{28}(-5y_1 - 5y_2 + y_3 + y_4 + 4y_5 + 4y_6).$$

9.9.5. Με βάση τα αποτελέσματα του παραδείγματος 9.6.1, να βρείτε τις εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων των α και β και τον συντελεστή προσδιορισμού για τα επόμενα δεδομένα:

x_i	–2	–1	0	1	2
y_i	3,5	7,2	10,4	12,6	15,9

9.9.6. Για τις παρατηρήσεις y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 δίνεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$y_1 = a - 3\beta + \varepsilon_1, y_2 = a - 5\beta + \varepsilon_2, y_3 = a + \varepsilon_3, y_4 = a + 5\beta + \varepsilon_4, y_5 = a + 3\beta + \varepsilon_5.$$

Να αποδείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελάχιστων τετραγώνων των α και β δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{a} = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5), \quad \hat{\beta} = \frac{1}{68}(-3y_1 - 5y_2 + 5y_4 + 3y_5).$$

9.9.7. Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων A και B, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν:

Πόλη A: 20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Πόλη B: 18 16 17 15 16 12 16 17 20 22

α) Να βρείτε την μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων A και B.

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών των πόλεων A και B και να διαπιστώσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη A παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς, ενώ το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη B αύξανε τη θερμοκρασία κατά 10%. Να βρείτε τις νέες τιμές της μέσης θερμοκρασίας και της τυπικής απόκλισης για τις δύο πόλεις.

9.9.8. Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης είναι τουλάχιστον 11 kg, αλλά μικρότερο από 26 kg. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 kg, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 kg, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 kg και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 kg.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

β) Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 kg, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

γ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα του προβλήματος.

δ) Να υπολογίσετε το μέσο βάρος των αποσκευών των επιβατών της πτήσης.

ε) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του βάρους των αποσκευών των επιβατών της πτήσης.

στ) Να υπολογίσετε τη διασπορά του βάρους των αποσκευών των επιβατών της πτήσης.

9.9.9. Ένας αριθμός επιβατών ενός πλοίου ρωτήθηκε πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασε ο καθένας κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν οι εξής: 5 επιβάτες δεν διάβασαν κανένα βιβλίο (0 βιβλία), 25 επιβάτες διάβασαν 1 βιβλίο, 15 επιβάτες διάβασαν 2 βιβλία, ενώ τέλος 5 επιβάτες διάβασαν 3 βιβλία.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων των δεδομένων.

β) Να βρείτε πόσοι από τους επιβάτες που ρωτήθηκαν διάβασαν κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους το πολύ δύο βιβλία.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των βιβλίων που διάβασε κάθε επιβάτης κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους.

δ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.

ε) Να υπολογίσετε τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των δεδομένων.

στ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων των δεδομένων.

9.9.10. Στον πίνακα 9.9.1 δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 ατόμων. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και στην τέταρτη κλάση.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά των δεδομένων.

γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την κορυφή των δεδομένων.

Πίνακας 9.9.1

Βάρος (σε kg) [–)	*Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i*
45–55	0,2
55–65	0,5
65–75	
75–85	

9.9.11. Η διοίκηση μιας επιχείρησης ενδιαφέρεται να προσδιορίσει πώς επηρεάζονται οι πωλήσεις ενός προϊόντος της από διάφορα χαρακτηριστικά, τα οποία θεωρούνται ότι έχουν σχέση μ’ αυτές. Για τον σκοπό αυτό κατέγραψε για 20 δίμηνα διαστήματα τον αριθμό πωλήσεων που επιτεύχθηκε (εξαρτημένη μεταβλητή Y), την τιμή πώλησής του σε € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_1), την τιμή του κύριου ανταγωνιστικού προϊόντος σε € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_2), το κόστος τηλεοπτικής διαφήμισης του προϊόντος σε χιλιάδες € (ανεξάρτητη μεταβλητή X_3) και το κόστος ραδιοφωνικής διαφήμισης (ανεξάρτητη μεταβλητή X_4) σε χιλιάδες €. Τα αποτελέσματα της έρευνας δίνονται στον πίνακα 9.9.2.

Να εξετάσετε όλα τα δυνατά μοντέλα παλινδόμησης που έχουν ως ανεξάρτητες μεταβλητές μία από τις X_1, X_2, X_3, X_4 και ως εξαρτημένη μεταβλητή την Y. Να βρείτε το καλύτερο από αυτά με βάση την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2.

Πίνακας 9.9.2

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	82	5	8	10	2
2	99	7,4	9	11	3
3	123	6,8	10	12	4
4	231	6	12	13	5
5	53	8,4	7	4	1
6	85	8	8,4	6	5
7	37	8,9	6,6	3	6,6
8	90	7,7	6,8	9	4,4
9	120	7,8	7	9,9	2,2
10	313	6,1	9,9	13,1	6
11	51	10	5,5	6,4	7,1
12	81	8,2	7,6	8,8	4,1
13	181	5,8	7,3	9,8	4
14	151	5,7	7,1	8,7	5,1
15	121	6,2	6	5,4	5,2
16	88	6,6	5	4,3	3,4
17	213	6,3	11	11,1	4
18	54	8,98	9	3,3	2,1
19	111	8,86	9,2	10,6	2,4
20	77	9,9	6,1	6,1	3

9.9.12. Στον πίνακα 9.9.3 φαίνονται τα σημεία τήξης και βρασμού (σε βαθμούς Kelvin) για 17 αμέταλλα

χημικά στοιχεία.
α) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων. Με βάση αυτό μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ισχυρή συσχέτιση μεταξύ σημείου τήξης και σημείου βρασμού;
β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών τα οποία μελετάμε.

Πίνακας 9.9.3

	Σύμβολο	*Όνομα*	*Σημείο τήξης*	*Σημείο βρασμού*
1	H	Hydrogen	14.175	20.28
2	C	Carbon	3948.15	4300.0
3	N	Nitrogen	63.29	77.36
4	O	Oxygen	50.5	90.2
5	F	Fluorine	53.63	85.03
6	Ne	Neon	24.703	27.07
7	P	Phosphorus	317.25	553.0
8	S	Sulfur	388.51	717.8
9	CI	Chlorine	172.31	239.11
10	Ar	Argon	83.96	87.3
11	Se	Selenium	494.15	958.0
12	Br	Bromine	266.05	332.0
13	Kr	Krypton	115.93	119.93
14	I	Iodine	386.65	457.4
15	Xe	Xenon	161.45	165.03
16	At	Astatine	575.15	610.0
17	Rn	Radon	202.15	211.3

9.9.13. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι μετρήσεις του βάρους Y και του ύψους X είκοσι βρεφών, τα οποία κατά τη γέννηση είχαν βάρος μικρότερο των 1500 gr (λιπόβαρα). Τα ύψη και βάρη των δέκα πρώτων βρεφών του πίνακα (στήλες 1 και 2) αφορούν αγόρια, ενώ τα ύψη και βάρη των δέκα επόμενων (στήλες 3 και 4) αφορούν κορίτσια.

Ύψος (σε cm)	*Βάρος (σε gr)*	*Ύψος (σε cm)*	*Βάρος (σε gr)*
41	1450	32	1100
40	1490	39	1450
38	1400	38	1400
38	1410	39	1450
38	1380	37	1350
32	1100	39	1450
33	1150	38	1380
38	1420	42	1490
30	1000	39	1480
34	1150	38	1450

α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ ύψους και βάρους χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα.
β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ ύψους και βάρους χρησιμοποιώντας μόνο τα δεδομένα που αφορούν τα αγόρια.
γ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ ύψους και βάρους χρησιμοποιώντας μόνο τα δεδομένα που αφορούν τα κορίτσια. Τι παρατηρείτε;

9.9.14. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) μητέρων (X) και του μεγαλύτερου τέκνου τους (Y):

I.Q. μητέρας	*I.Q. παιδιού*	*I.Q. μητέρας*	*I.Q. παιδιού*
80	85	110	110
95	100	125	130
90	90	120	110
100	105	135	135
110	120	135	125

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων και από το διάγραμμα διασποράς να εκτιμήσετε το πρόσημο του συντελεστή συσχέτισης, καθώς και κατά πόσον αυτός είναι υψηλός ή χαμηλός.
β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Κεφάλαιο Δέκατο
Πιθανότητες

10.11 Συνοπτικά στοιχεία θεωρίας

Δειγματικός χώρος Ω	Το σύνολο των (δυνατών) αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε μια εκτέλεση ενός πειράματος τύχης.
Ενδεχόμενα A, B,...	Υποσύνολα του δειγματικού χώρου
Τομή ενδεχομένων AB	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται και το A και το B
Ένωση ενδεχομένων $A \cup B$	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται το A ή το B
Συμπλήρωμα A'	Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A
Διαφορά $A - B$	Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται *το* A αλλά όχι το B
Ξένα ενδεχόμενα A, B	Ενδεχόμενα τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία ($AB = \varnothing$)
Σχετική συχνότητα f_A	ν_A/ν όπου ν *ο* αριθμός επαναλήψεων του πειράματος και ν_A ο αριθμός εμφανίσεων του A
Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας	$P(A) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{\nu_A}{\nu}$
Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας	$P1.\ P(A) \geq 0$ $P2.\ P(\Omega) = 1$ $P3.$ Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Άλλες ιδιότητες της πιθανότητας	$P(\varnothing) = 0 \leq P(A) \leq 1 = P(\Omega)$ $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\alpha_i)$, για $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ $P(A') = 1 - P(A)$ $P(A - B) = P(AB') = P(A) - P(AB)$ Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Ισοπίθανα ενδεχόμενα Α, Β	$P(A) = P(B)$
Κλασικός ορισμός της πιθανότητας	$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega} =$ $= \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος}}$

Πολλαπλασιαστική αρχή	Αν το στοιχείο (αντικείμενο) α_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του α_1 το στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ το στοιχείο α_k μπορεί να επιλεγεί με ν_k διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά, κατά $\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_k$ τρόπους.
Διάταξη των ν στοιχείων ανά k	Κάθε διατεταγμένη k-άδα η οποία αποτελείται από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία επιλεγμένα ανάμεσα από ν στοιχεία.
Πλήθος διατάξεων των ν στοιχείων ανά k	$(\nu)_k = \nu(\nu-1) \cdots (\nu-k+1) = \dfrac{\nu!}{(\nu-k)!}, \quad 1 \le k \le \nu$
Μετάθεση των ν στοιχείων	Διάταξη των ν στοιχείων ανά ν
Πλήθος μεταθέσεων των ν στοιχείων	$\nu!$
Επαναληπτική διάταξη των ν στοιχείων ανά k	Κάθε διατεταγμένη k-άδα αποτελούμενη από στοιχεία επιλεγμένα ανάμεσα από ν (δεδομένα) στοιχεία.
Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά k	$\nu^k, \quad k \ge 1, \quad \nu \ge 1$
Συνδυασμός των ν στοιχείων ανά k	Κάθε συλλογή (μη διατεταγμένη) αποτελούμενη από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία, επιλεγμένα ανάμεσα από ν στοιχεία.
Πλήθος συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k	$\dbinom{\nu}{k} = \dfrac{(\nu)_k}{k!} = \dfrac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$
Δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A δοθέντος του ενδεχομένου B	$P(A\mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ και $P(B\mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$
Πολλαπλασιαστικός τύπος	$P(AB) = P(B)P(A\mid B)$, $P(AB) = P(A)P(B\mid A)$
Θεώρημα ολικής πιθανότητας	$P(A) = P(A\mid B)\,P(B) + P\,(A\mid B')\,P(B')$ $P(A) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A\mid B_i)\,P(B_i)$ για κάθε διαμέριση $B_1, B_2, \ldots B_\nu$ του Ω.
Θεώρημα του Bayes	$P(B_i\mid A) = \dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\nu} P(A\mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1,2, \ldots, \nu$ για κάθε διαμέριση $B_1, B_2, \ldots B_\nu$ του Ω.
Ανεξάρτητα ενδεχόμενα A, B	$P(AB) = P(A)\,P(B)$
Εξαρτημένα ενδεχόμενα A, B	$P(AB) \neq P(A)\,P(B)$

Ανεξαρτησία και συμπληρωματικά ενδεχόμενα	*Αν* A, B ανεξάρτητα τότε είναι ανεξάρτητα και τα ζεύγη $\{A, B\}$, $\{A,B\}, \{A,B\}$.

Τύποι για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Συνάρτηση πιθανότητας f	$f(x) = P(X = x)$ για $x \in R_X$
Ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας f	Σ1. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R_X$ Σ2. $\sum_{x \in Rx} f(x) = 1$
Σχέση συνάρτησης πιθανότητας και συνάρτησης κατανομής	$f(t) = \sum_{x \in R_X : x \leq t} f(x)$
$P(X \in A)$ για $A \subseteq R_X$	$\sum_{x \in A} f(x)$
Μέση τιμή της X	$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} xP(X = x) = \sum_{x \in R_X} xf(x)$
Μέση τιμή συνάρτησης μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής	$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x)f(x)$

Τύποι για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας	$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
Σχέση συνάρτησης πυκνότητας και συνάρτησης κατανομής	$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ $f(x) = F'(x)$
Υπολογισμός πιθανοτήτων για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές	$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Τύποι για διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Συνάρτηση κατονομής της X	$F(t) = P(X \leq t)$
Διακύμανση της X	$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2]$
Τυπική απόκλιση της X	$\sigma = \sqrt{V(X)}$

Ιδιότητες της μέσης τιμής και της διακύμανσης	M1. $E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)$ Δ1. $V(\alpha X+\beta)=\alpha^2 V(X)$ M2. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ Δ2. $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ M3. $[E(X)]^2 \leq E(X^2)$
Δοκιμή Bernoulli	Πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα: επιτυχία (ε) ή αποτυχία (α).
Διωνυμική κατανομή $b\ (\nu, p)$	Είναι η κατανομή του αριθμού των επιτυχιών σε ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας p. $f(x)=\binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x}$, $x=0,1\ldots,\nu$ $E(X)=\nu p$, $V(X)=\nu pq$
Γεωμετρική κατανομή $G(p)$	Είναι η κατανομή του αριθμού των δοκιμών Bernoulli (ανεξάρτητων και με ίδια πιθανότητα επιτυχίας p) που πρέπει να εκτελεστούν μέχρις ότου εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία. $f(x)=q^{x-1}p$, $\quad x=1,2,\ldots$ $E(X)=\frac{1}{p}$, $V(X)=\frac{q}{p^2}$
Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<\beta$	$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}$ $F(t)=\frac{1}{\beta-\alpha}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ $E(X)=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $V(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.
Κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, σ > 0	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$, $\quad -\infty<x<\infty$ $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$
Τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$	$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^{2/2}}$, $\quad -\infty<z<\infty$ $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$
Ιδιότητες της κανονικής κατανομής	Αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ τότε $Z=\frac{X-\mu}{2} \sim N(0,1)$ $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$
Εκθετική κατανομή	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $\quad x \geq 0$ $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, $\quad t \geq 0$ $E(x)=1/\lambda$, $V(X)=1/\lambda^2$

Η ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (ιδιότητα του αμνήμονος) της εκθετικής κατανομής	Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε $P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$, για $s, t > 0$

10.12 Ερωτήσεις κατανόησης.

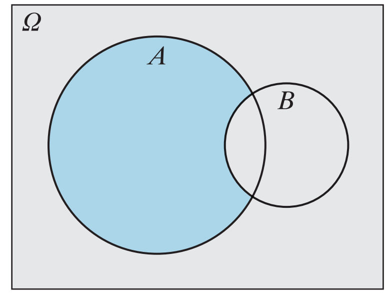
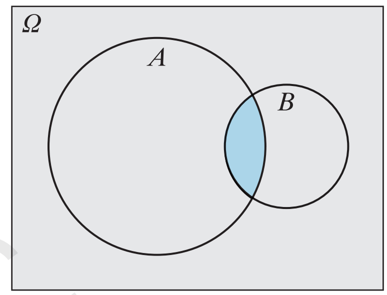
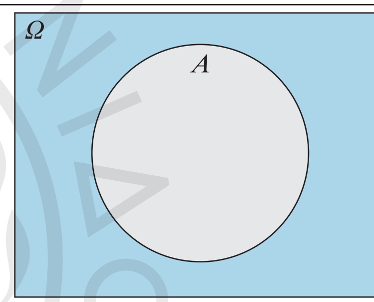
Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

1.	Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.	**Σ Λ**
2.	Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι και ανεξάρτητα.	**Σ Λ**
3.	Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά του A' και B' είναι ξένα μεταξύ τους.	**Σ Λ**
4.	Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας για ένα ενδεχόμενο A έχουμε $P(A) = N(A) / N(\Omega)$.	**Σ Λ**
5.	Έστω ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $0 < P(B) < 1$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο A του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) > 0$, ισχύει ο τύπος $P(B' \mid A) = \dfrac{P(A \mid B')P(B')}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B')P(B')}$.	**Σ Λ**
6.	Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο «κεφαλές», μια «κεφαλή» και μια «γράμματα», ή δύο«γράμματα», και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα 1/3.	**Σ Λ**
7.	Για δύο ενδεχόμενα A, B ισχύει πάντοτε η ανισότητα $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.	**Σ Λ**
8.	Αν για δύο ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύει $P(AB) \neq P(A)P(B)$, τα A,B λέγονται εξαρτημένα.	**Σ Λ**
9.	Ο εμπειρικός ορισμός της πιθανότητας ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.	**Σ Λ**
10.	Για δύο ενδεχόμενα A, B ισχύουν πάντοτε οι ισότητες $P(A - B) \leq P(A) - P(B)$ και $P(B - A) \leq P(B) - P(A)$.	**Σ Λ**
11.	Αν τα ενδεχόμενα A, B του Ω είναι ξένα τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	**Σ Λ**
12.	Αν A, B, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε $P(AB\Gamma) = P(\Gamma \mid AB)\, P(B \mid A)\, P(A)$.	**Σ Λ**
13.	Η διακύμανση μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ δίνεται από τον τύπο $V(X) = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)$.	**Σ Λ**
14.	Αν $E(X) = 2$ και $E(X^2) = 8$ τότε μπορούμε να γράψουμε $E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = 8 - 2 = 6$.	**Σ Λ**

15.	Για κάθε τυχαία μεταβολή X ισχύει η ισότητα $E(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha(E(X))^2 + \beta E(X) + \gamma$.	**Σ Λ**
16.	Για κάθε διακριτή τυχαία μεταβολή X ισχύουν οι ισότητες $P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta)$.	**Σ Λ**
17.	Αν X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβολή και $\alpha \in R_x$, τότε $P(X = \alpha) = 0$.	**Σ Λ**
18.	Αν $f(x)$ και $F(x)$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβολής τότε θα ισχύει $f(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	**Σ Λ**
19.	Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η διακύμανση θα δίνεται από τον τύπο $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)dx$, όπου $\mu = E(X)$ και $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της X.	**Σ Λ**
20.	Για κάθε τυχαία μεταβλητή X, διακριτή ή συνεχή, ισχύει ο τύπος $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$	**Σ Λ**
21.	Αν ρίχνουμε ένα ζάρι συνεχώς, ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών μέχρι να φέρουμε για πρώτη φορά άσσο είναι 6.	**Σ Λ**
22.	Η μέση τιμή και η διακύμανση της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους $\nu = 10$ και $p = 1/10$ είναι ίσες με $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 0$.	**Σ Λ**
23.	Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή, τότε η X παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών.	**Σ Λ**
24.	Η κανονική κατανομή ικανοποιεί την αμνήμονα ιδιότητα.	**Σ Λ**
25.	Στην εκθετική κατανομή η μέση τιμή είναι πάντοτε ίση με την τυπική της απόκλιση.	**Σ Λ**
26.	Αν $\Phi(z)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$, τότε $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$	**Σ Λ**
27.	Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $P(X > \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$.	**Σ Λ**
28.	Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu > 3\sigma$, τότε η πιθανότητα $P(X>0)$ είναι μεγαλύτερη από 0,3%.	**Σ Λ**
29.	Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η πιθανότητα να πάρει η τυχαία μεταβολή X τιμές μικρότερες του $\mu + 3\sigma$ είναι ίση (περίπου) με 99,9%.	**Σ Λ**
30.	Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε θα ισχύει πάντοτε ότι $P(X \leq \mu) = 2P(X > \mu)$.	**Σ Λ**

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.	Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,8, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού; α) 0,4 β) 0,3 γ) 0,2 δ) $0{,}8^2$

2.	Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο με γαλάζιο χρώμα εμβαδόν; α) AB β) A' γ) $A-B$ δ) $B-A$. 
3.	Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο με γαλάζιο χρώμα εμβαδόν; α) AB β) A' γ) $A-B$ δ) $B-A$. 
4.	Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο με γαλάζιο χρώμα εμβαδόν; α) AB β) A' γ) $A-B$ δ) $B-A$. 
5.	Σε ένα πείραμα τύχης: α) Δεν μπορούμε να βρούμε το σύνολο των διαφορετικών αποτελεσμάτων που είναι δυνατόν να εμφανιστούν. β) Δεν ξέρουμε τι αποτέλεσμα θα εμφανιστεί στην κάθε επανάληψή του. γ) Κάθε επανάληψή του δίνει πάντοτε διαφορετικό αποτέλεσμα από τις προηγούμενες επαναλήψεις. δ) Δεν ισχύει κανένας από τους προηγούμενους ισχυρισμούς.
6.	Ένα πείραμα τύχης έχει δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,...,10\}$. Αν $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, $\Gamma=\{3,6,9\}$ και κατά την εκτέλεση του πειράματος το αποτέλεσμα που πήραμε ήταν «6», ποια ενδεχόμενα έχουν πραγματοποιηθεί; α) A και B β) A και Γ γ) B και Γ δ) A,B και Γ
8.	Αν σε 10.000 επαναλήψεις ενός πειράματος το ενδεχόμενο A εμφανίστηκε 2.500 φορές, τότε α) $P(A') = 0{,}25$ β) $P(A) = 0{,}75$ γ) $P(A') = 0{,}75$ δ) $P(A) = 2{,}5$
9.	Αν δύο ενδεχόμενα A,B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι ξένα, τότε α) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ β) $P(A\cup B) = P(A)\,P(B)$ γ) $P(AB) = P(A)\,P(B)$ δ) $P(A'B) = P(A')\,P(B)$

10.	Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Ποιο από τα επόμενα είναι σωστό; α) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$ β) $P(A) \leq P(B)$ τότε $A \subseteq B$ γ) Αν $P(A) = P(B)$ τότε $A = B$ δ) $P(A'B) = P(A) - P(B)$
11.	Ο τύπος $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ισχύει α) αν $A \cup B = \Omega$ β) πάντοτε γ) μόνο όταν $A\,B = \varnothing$ δ) ποτέ
12.	Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β έχουμε $P(A) = \alpha$, $P(B) = \beta$, $P(AB) = \gamma \neq 0$, τότε α) $P(A \cup B) = \alpha + \beta - \gamma$ και $P(A'B) = \beta - \gamma$ β) $P(A \cup B) = \alpha + \beta$ και $P(A'B) = (1 - \alpha)\beta$ γ) $P(A') = 1 - \alpha$ και $P(A'B') = 1 - \alpha - \beta$ δ) $P(A'B) = \beta - \gamma$ και $P(B'A) = \alpha - \beta$
13.	Ο τύπος (κλασικός ορισμός της πιθανότητας) $P(A) = N(A) / N(\Omega)$: α) Ισχύει πάντοτε. β) Ισχύει μόνο αν ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένος. γ) Ισχύει μόνο αν ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένος. δ) Ισχύει και για άπειρους δειγματικούς χώρους.
14.	Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο α) $\binom{\nu}{k} = \frac{(\nu - 1) \cdots (\nu - k + 1)}{k!}$ γ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$ β) $(\nu)_k = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)$. δ) $k!\,/\nu!$
15.	Για μια τυχαία μεταβλητή X διακριτή ή συνεχή, ισχύει πάντοτε ο τύπος α) $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2\, V(X)$ γ) $V(\alpha X + \beta) = \alpha\, V(X)$ β) $V(\alpha X + \beta) = V(X)$ δ) $V(\alpha X + \beta) = \beta\, V(X)$
16.	Για μια τυχαία μεταβλητή X διακριτή ή συνεχή, ισχύει πάντοτε ο τύπος α) $[E(X)]^2 \geq E(X^2)$ γ) $[E(X)]^2 = E(X^2)$ β) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ δ) $[E(X)]^2 \leq E(X^2)$
17.	Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f. Τότε α) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ γ) $f(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ δ) ισχύουν και οι τρεις σχέσεις (α), (β), (γ).
18.	Αν για τα ενδεχόμενα A και B ισχύει $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$, τότε α) $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ γ) $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ β) $P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ δ) $P(A \mid B) = \frac{P(B)}{P(AB)}$

19	Από ένα δοχείο που περιέχει 3 άσπρες και 3 κόκκινες σφαίρες εξάγουμε μία σφαίρα, και ***χωρίς*** να επιστρέψουμε την σφαίρα στο δοχείο διαλέγουμε στη συνέχεια μία δεύτερη. Αν η πρώτη σφαίρα που διαλέξαμε ήταν άσπρη, η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι άσπρη είναι α) 2/5 β) 3/5 γ) 3/6 δ) 1/6
20.	Αν A και B είναι δύο οποιαδήποτε ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε: α) $P(AB) = P(AB)\,P(B)$ γ) $P(A \mid B) = P(B)$ β) $P(AB) = P(AB) + P(B)$ δ) ισχύουν και οι τρεις προηγούμενες ισότητες.
21.	Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους και ισχύει $P(A) > 0, P(B) > 0$, τότε: α) τα A, B είναι ανεξάρτητα γ) τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα β) ισχύει $P(AB) > 0$ δ) $P(AB) = P(AB)\,P(B)$
22.	Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε θα ισχύει: α) $P(A \mid B) = P(A)$ γ) $P(AB) = P(A)\,P(B)$ β) $P(B \mid A) = P(B)$ δ) και οι τρεις ισότητες που δίνονται.
23.	Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f. Τότε α) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$ γ) $f'(x) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ δ) $P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$
24.	Αν $\mu = E(X)$ είναι η μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ τότε θα ισχύει α) $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x)\,dx = 1$ γ) $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x)\,dx > 0$ β) $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x)\,dx = 0$ δ) $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x)\,dx < 0$
25.	Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $$f(x) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le x \le 1/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$ τότε α) $\alpha=1$ β) $\alpha=1/2$ γ) $\alpha=2$ δ) $\alpha=0$
26.	Αν ρίχνουμε ένα νόμισμα συνεχώς, ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά κεφαλή είναι α) 1 β) 2 γ) άπειρος δ) 4
27.	Ο αριθμός X των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν (ανεξαρτήτων) δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p ακολουθεί την α) Γεωμετρική κατανομή γ) Διωνυμική κατανομή β) Εκθετική κατανομή δ) Κανονική κατανομή

28.	Ένας αριθμός επιλέγεται τυχαία στο διάστημα [1/2, 7/2]. Τότε η πιθανότητα να ανήκει στο διάστημα [1,3] είναι ίση με α) 1/2 β) 1/3 γ) 1/4 δ) 2/3
29.	Ο χρόνος ζωής X μιας συσκευής ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5. Τότε η πιθανότητα $P(X > 5)$ είναι περίπου ίση με α) 5% β) 95% γ) 37% δ) 25%
30.	Αν $X \sim N(0,4)$ ποια από τις επομενες τυχαίες μεταβλητές ακοθουθεί την $N(0,1)$; α) $Z = X + 4$ β) $Z = X/4$ γ) $Z = X/2$ δ) $Z = X - 4$
32.	Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η μέση τιμή $E(X^2)$ θα είναι ίση με α) $\mu^2 + \sigma^2$ β) μ^2 γ) μ^2 / σ^2 δ) $\mu^2\ \sigma^2$

10.13 Γενικές ασκήσεις – Εφαρμογές.

10.13.1. Στο τμήμα έλεγχου ποιότητας μίας μονάδας έρχετα προς έλεγχο μια παρτίδα προϊόντων η οποία περιέχει 100 καλά προϊόντα και 40 ελαττωματικά. Για να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος της παρτίδας, ο υπεύθυνος εξετάζει τα προϊόντα ένα-ένα χωρίς επανάθεση, δηλαδή τα προϊόντα που ελέγχονται δεν επανατοποθετούνται στην παρτίδα πριν ληφθεί το επόμενο προϊόν προς έλεγχο.

α) Αν τα πρώτα 20 προϊόντα που ελέγχθηκαν ήταν καλά, ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο να είναι ελαττωματικό;

β) Αν τα πρώτα 20 προϊόντα που ελέγχθηκαν ήταν ελαττωματικά, ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο να είναι καλό;

10.13.2. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας της μορφής

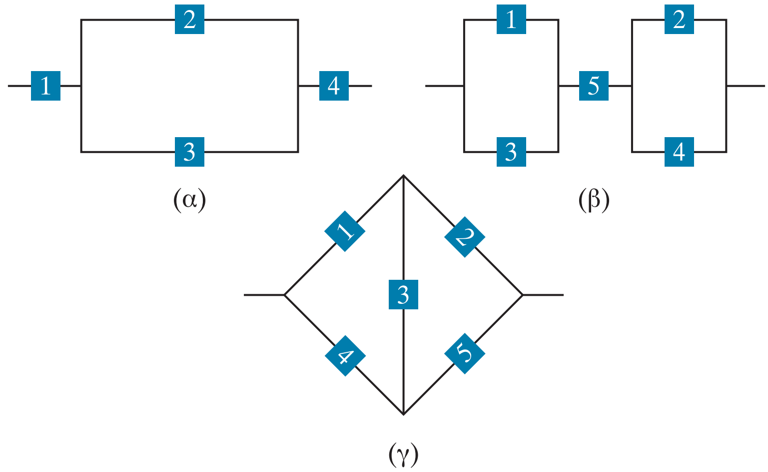
$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{5}, \quad x \in R_x = \{-2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha\}.$$

α) Να διαπιστώσετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α ισχύει $E\{X) = 0$.

β) Τι συμβαίνει με τη διακύμανση των τυχαίων μεταβλητών X καθώς ο πραγματικός αριθμός α αυξάνει;

10.13.3. Ένα ηλεκτρονικό σύστημα αποτελείται από 4 εξαρτήματα (μονάδες), τα οποία λειτουργούν το ένα ανεξάρτητα από το άλλο και είναι συνδεδεμένα, όπως δείχνει το σχήμα 10.13α. Για τη λειτουργία του συστήματος απαιτείται είτε να λειτουργούν και τα δύο εξαρτήματα 1 και 2 συγχρόνως είτε να λειτουργούν και τα δύο εξαρτήματα 3 και 4 συγχρόνως. Η πιθανότητα λειτουργίας των εξαρτημάτων 1, 2, 3 και 4 (η οποία είναι γνωστή ως ***«αξιοπιστία των εξαρτημάτων»***) είναι αντίστοιχα 0,85, 0,90, 0,98 και 0,80. Ποια είναι η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος; Η τελευταία λέγεται ***«αξιοπιστία του συστήματος»*** και συμβολίζεται συνήθως με R.

10.13.4. Τα επόμενα σχήματα δείχνουν κάποια ηλεκτρικά κυκλώματα στα οποία έχουν τοποθετηθεί διακόπτες (σημειωνονται με τους αριθμούς $i = 1,2,...$). Κάθε διακόπτης λειτουργεί ανεξάρτητα από τους άλλους και μπορεί να είναι είτε κλειστός (επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) με πιθανότητα p_i, $i = 1, 2,...$ είτε ανοικτός (δεν επιτρέπει τη διέλευση ρεύματος) με πιθανότητα $1 - p_i, i = 1,2,...$ Αν στα άκρα του κυκλώματος εφαρμοστεί κάποια τάση, να υπολογιστεί συναρτήσει των p_i, $i = 1,2,...$ η πιθανότητα να περάσει ρεύμα από το κύκλωμα.



Σχ. 10.13β

α) Να γίνει η εφαρμογή για $p_i = 0.7 + 0.05i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

β) Ας υποθέσουμε ότι στο κύκλωμα (α) οι πιθανότητες p_i, $i = 1, 2, 3, 4$ είναι όλες ίσες μεταξύ τους. Τι τιμή πρέπει να έχουν αυτές έτσι ώστε η πιθανότητα να περάσει ρεύμα από το κύκλωμα να είναι τουλάχιστον 99%;

10.13.5. Για δύο συγκεκριμένες παθήσεις $α$ και $β$ είναι γνωστό οτι το ποσοστό των ατόμων ενός πληθυσμού που πάσχουν από την $α$ μόνο (δηλαδή δεν έχουν συγχρόνως και την πάθηση $β$), είναι 0,60, το ποσοστό των ατόμων που πάσχουν από τη $β$ μόνο (δηλαδή δεν έχουν συγχρόνως και την πάθηση $α$) είναι 0,50, ενώ το ποσοστό εκείνων που πάσχουν και από τις δύο είναι 0,20. Είναι οι δύο παθήσεις ανεξάρτητες; Αν όχι ποια είναι η μεταβολή της πιθανότητας να πάσχει κάποιο άτομο από τη μία πάθηση αν είναι ήδη γνωστό ότι πάσχει από την άλλη;

10.13.6. Σε μία μελέτη εξετάστηκαν 15.000 άτομα ηλικίας άνω των 40 ετών και βρέθηκε ότι 6.000 από αυτούς ήταν καπνιστές, 4.500 είχαν πνευμονικό πρόβλημα, ενώ 3.000 ήταν καπνιστές με πνευμονικό πρόβλημα.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

i) να έχει ένα άτομο πνευμονικό πρόβλημα με δεδομένο ότι είναι καπνιστής,

ii) να έχει ένα άτομο πνευμονικό πρόβλημα με δεδομένο ότι δεν είναι καπνιστής.

β) Είναι το κάπνισμα και η εμφάνιση πνευμονικού προβλήματος ανεξάρτητα;

10.13.7 Σε ένα σύστημα τηλεπικοινωνίας με πομπό και δέκτη, τα εκπεμπόμενα σήματα είναι 0 ή 1. Η πιθανότητα να καταγραφεί στο δέκτη 1 όταν ο πομπός έχει εκπέμψει 1 είναι 99%, ενώ η πιθανότητα να καταγραφεί 0 όταν ο πομπός έχει εκπέμψει 0 είναι 98%. Αν ο δέκτης καταγράψει 1, ποια είναι η πιθανότητα να έχει εκπεμφθεί 1.

α) Αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των 0 που εκπέμπονται είναι ίσος με τον αριθμό των 1;

β) Αν είναι γνωστό ότι στα σήματα που εκπέμπονται, μόνο 10 από τα 40 ψηφία είναι ίσα με 1 (και τα υπόλοιπα 30 είναι ίσα με 0);

10.13.8. Σε μια έκθεση έργων τέχνης το 95% των εκθεμάτων είναι πρωτότυπα (αυθεντικά) έργα, ενώ το 5% είναι αντίγραφα. Ενας συλλέκτης μπορεί να αναγνωρίσει ένα αντίγραφο με πιθανότητα 80%, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα αναγνώρισης για πρωτότυπα έργα είναι 90%. Αν αγοράσει ένα έργο από την έκθεση νομίζοντας ότι είναι πρωτότυπο ποια είναι η πιθανότητα να μην είναι;

10.13.9. Σε ένα σύστημα ασφαλείας υπάρχουν $ν$ ραντάρ τα οποία λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Η πιθανότητα να εντοπίσει ένα ραντάρ κάποιο αντικείμενο που πλησιάζει, σε ένα κύκλο λειτουργίας του, είναι ίση με ρ. Κάθε ραντάρ εκτελεί k (ανεξαρτήτους) κύκλους λειτουργίας σε χρόνο t. Ένα αντικείμενο πλησιαζει στο σύστημα ασφάλειας και μένει εντός του πεδίου που ανιχνεύουν τα ν ραντάρ χρόνο t. Ποια είναι η πιθανότητα να εντοπιστεί το αντικείμενο.

α) Απο ενα τουλάχιστον ραντάρ;

β) Από όλα τα ραντάρ;

10.13.10. Ενας φανατικός θεατρόφιλος πηγαίνει κάθε εβδομάδα σε ενα απο τα 16 θέατρα της πόλης στην οποία κατοικεί. Τα έργα που παίζονται στα 7 από τα 16 θέατρα είναι κωμωδίες, ενώ στα υπόλοιπα 9 δράματα. Μετά το τέλος της πέμπτης εβδομάδας, απαντώντας σε σχετική ερώτηση ενός φίλου του, ο θεατρόφιλος λέει ότι στις τρεις πρώτες εβδομάδες παρακολούθησε μόνο δραματικές παραστάσεις. Αν η επιλογή της παράστασης γίνεται εντελώς τυχαία κάθε φορά, ποια είναι η πιθανότητα στις δύο τελευταίες εβδομάδες να έχει παρακολουθήσει κωμωδίες;

10.13.11 Ένα πολεμικό αεροσκάφος με φορτίο ν βομβών βάλει κατά ενός στόχου μέχρι να τον καταστρέψει η να εξαντληθεί το φορτίο των βομβών του. Η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος είναι ίση με p_1, ενώ η πιθανότητα να καταστραφεί ένας στόχος που έχει χτυπηθεί από βόμβα ένα p_2. Αν οι διαδοχικές βολές θεωρούνται ανεξάρτητα «πειράματα» να υπολογιστούν οι πιθανότητες.

α) Να επιστρέψει το αεροσκάφος από την αποστολή χωρίς να έχει χρησιμοποιήσει όλο το φορτίο που είχε.

β) Μετά την καταστροφή του στόχου, να έχουν μείνει αχρησιμοποίητες τουλάχιστον δύο βόμβες.

γ) Να χρειαστούν το πολύ δύο βόμβες για την ολοκλήρωση της αποστολής.

10.13.12. Η ακτίνα R (σε km) μιας πετρελαιοκηλίδας, 24 ώρες μετά τη διαρροή πετρελαίου από ένα δεξαμενόπλοιο, είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(r) = \frac{3}{4}\left[1 - (20 - r)^2\right], \quad 19 \leq r \leq 21.$$

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή για το εμβαδό $Y = \pi R^2$ το οποίο καλύπτει η πετρελαιοκηλίδα το πρώτο 24–ωρο.

10.13.13. Η κατανομή των λαχείων που κερδίζουν σε μια έκδοση του στιγμαίου κρατικού λαχείου (ξυστό), όπου το κάθε λαχείο κοστίζει 1€ , δίνεται στον ακόλουθο πίνακα

Κατανομή κερδών Λαχεία έκδοσης: 6480000	
Κατηγορία κέρδους (€)	***Κερδίζοντα λαχεία***
1	1026000
2	226800
5	86400
10	32400
25	10800
75	2932
180	225
3000	10
30000	4
Σύνολο	**1385571**

Αν κάποιος αγοράσει ένα λαχείο, τότε ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος του; Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος ενός λαχείου που κερδίζει;

10.13.14. Μια εταιρεία, θέλοντας να προωθήσει 2 καινούργια προϊόντα της α και p στέλνει έναν πωλητή για να ενημερώσει τους πελάτες της. Σε κάθε πελάτη ο πωλητής δίνει ένα μικρό δώρο, το οποίο στοιχίζει στην εταιρεία 20€. Αν ο πελάτης αγοράσει το προϊόν α, η εταιρεία κερδίζει 50€, ενώ αν αγοράσει το προϊόν β, η εταιρεία κερδίζει 100€. Η πιθανότητα να πεισθεί κάποιος να αγοράσει το προϊόν α είναι 3/10 για το προϊόν β είναι 2/10, ενώ η πιθανότητα να αγοράσει και τα δύο προϊόντα είναι 1/10. Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας ανά πελάτη;

10.13.15. Το σφάλμα X που γίνεται κατά τη μέτρηση (μέσω ενός συγκεκριμένου οργάνου) είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(4-x^2), & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου c μια πραγματική σταθερά.

α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σφάλμα μιας μέτρησης να είναι

i. θετικό.

ii. μικρότερο του 1 κατ' απόλυτη τιμή.

iii. μικρότερο του –1/2 ή μεγαλύτερο του 1/2.

10.13.16 Ο χρόνος πλεύσης ενός πλοίου σε 10-άδες ώρες μέχρι να φτάσει σε έναν συγκεκριμένο προορισμό περιγράφεται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{16}{t^2}, & t \geq 4 \\ 0, & t < 4\,. \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

β) Ποια είναι η πιθανότητα το πλοίο να έχει φτάσει στον προορισμό του

i. εντός 60 ωρών;

ii. σε περισσότερες από 60 αλλά λιγότερες από 70 ώρες;

γ) Να βρεθεί η μέση διάρκεια των ταξιδιών του πλοίου προς τον συγκεκριμένο προορισμό.

δ) Να βρεθεί η πιθανότητα η διάρκεια ενός ταξιδιού να είναι μικρότερη από την μέση διάρκεια που υπολογίστηκε στο ερώτημα (γ).

10.13.17. Μια επιτροπή αποτελείται από 3 μέλη. Κάθε μέλος παίρνει σωστή απόφαση για κάποιο ζήτημα ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα p. Η τελική απόφαση λαμβάνεται κατά πλειοψηφία.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα λήψης σωστής απόφασης.

β) Να δειχτεί ότι για $p \geq 75\%$ η πιθανότητα σωστής απόφασης είναι τουλάχιστον 84%.

γ) Να βρεθεί σε ποια περίπτωση είναι προτιμότερο να αποφασίζει ένα άτομο από μόνο του από ό,τι να αποφασίζει η τριμελής επιτροπή (υποθέτουμε ότι $0 < p < 1$).

10.13.18. Ο χρόνος ζωής T μια συσκευής (σε 1000-άδες ώρες) ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Αν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να καταστραφεί η συσκευή εντός των πρώτων 1000 ωρών είναι εξαπλάσια της πιθανότητας να "ζήσει" περισσότερο από 2000 ώρες:

α) να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής της συσκευής.

β) να υπολογιστεί η πιθανότητα να καταστραφεί η συσκευή εντός των πρώτων 500 ωρών λειτουργίας της.

γ) να υπολογιστεί η πιθανότητα να ζήσει η συσκευή περισσότερο από 3000 ώρες.

10.13.19. Ο χρόνος αναμονής T μέχρι τη λήψη ενός e-mail είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_T(t)$ και συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$. Αν μέχρι το χρόνο t_0 δεν έχουμε λάβει το e-mail, να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής του ***υπολειπόμενου χρόνου αναμονής*** $X = T - t_0$, δηλαδή η

$$F(t) = P(X \leq t \mid T > t_0).$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας.
Να γίνει εφαρμογή στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Τι παρατηρείτε;

10.13.20. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και $\alpha > 0$ ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η τιμή x για την οποία μεγιστοποιείται η πιθανότητα

$$P(x \leq X \leq x + \alpha).$$

10.13.21. Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων αποτελούνται από τρία γράμματα και έναν τετραψήφιο αριθμό. Για το πρώτο τμήμα του αριθμού χρησιμοποιούνται μόνο τα 14 ελληνικά γράμματα τα οποία συμπίπτουν με αντίστοιχους λατινικούς χαρακτήρες *(A, B, E, Z, H, I, K, M, N,* O, *P, T, Y, X),* ενώ στην πρώτη θέση του δευτέρου τμήματος δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 0 (ώστε να έχουμε τετραψήφιο αριθμό). Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι δυνατοί αριθμοί κυκλοφορίας έχουν μοιραστεί σε αυτοκίνητα. Αν διαλέξουμε ένα αυτοκίνητο στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα

α) να έχει αριθμό κυκλοφορίας που αρχίζει από φωνήεν;

β) το τελευταίο ψηφίο του αριθμού κυκλοφορίας να είναι 8 ή 9;

γ) να έχει αριθμό κυκλοφορίας που αρχίζει από φωνήεν και το τελευταίο ψηφίο του είναι 8 ή 9;

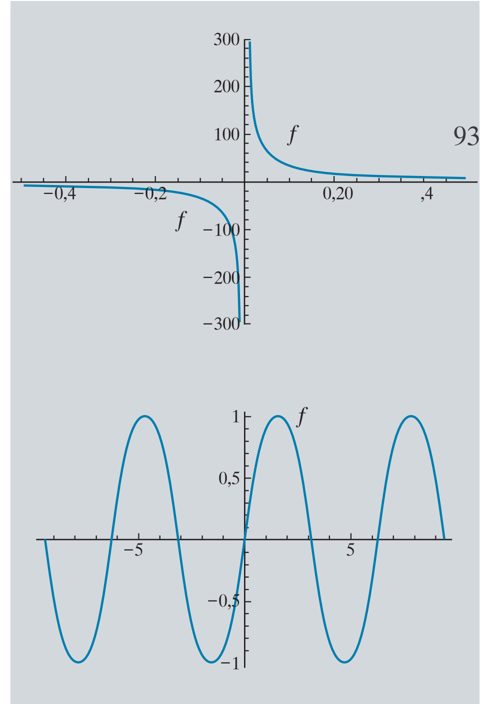
10.13.22. Η εβδομαδιαία επιβατική κίνηση ενός λιμανιού σε 1000-αδες επιβάτες περιγράφεται από μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

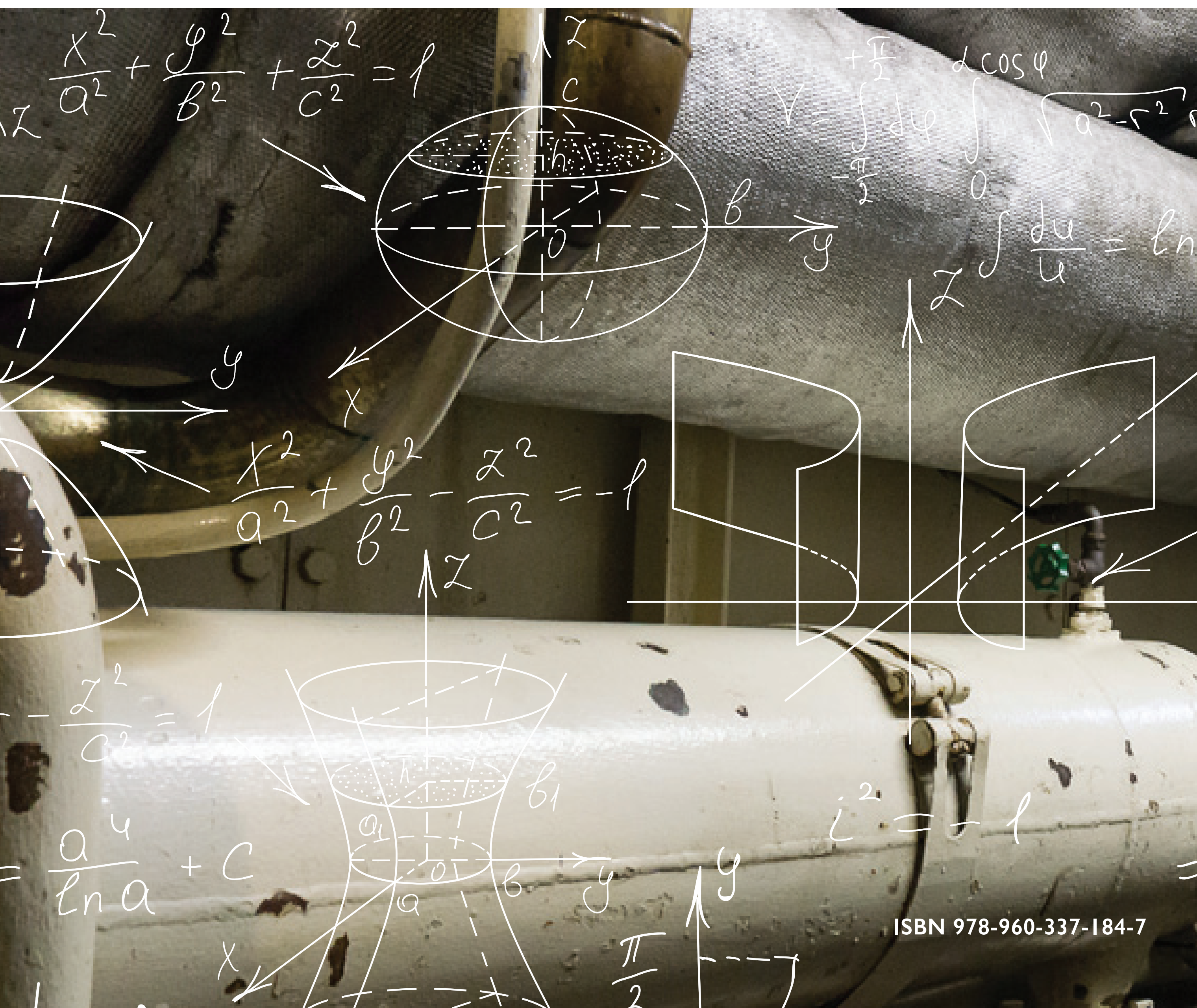
$$F(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{16}{t^2}, & t \geq 4 \\ 0, & t < 4. \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

β) Ποια είναι η πιθανότητα σε μια εβδομάδα η επιβατική κίνηση του λιμανιού να ξεπεράσει τους 6000 επιβάτες;

10.13.23. Μια εταιρεία που διοργανώνει θαλάσσιες εκδρομές γνωρίζει ότι το 5% των ατόμων που κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν δεν εμφανίζονται. Αν η εταιρεία κάνει κράτηση για 52 άτομα σε μια εκδρομή που θα γίνει με ένα μικρό πλοίο χωρητικότητας 50 καθήμενων ατόμων, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμο κάθισμα για καθέναν επιβάτη που εμφανίζεται για να ταξιδέψει;





ISBN 978-960-337-184-7